

平成14年度東京大学大学院理学系研究科  
物理学専攻修士課程入学試験問題

## 数 学 ・ 英 語

平成13年8月28日（火） 9時00分～11時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で4問ある。4問のすべてに解答せよ。
4. 答案用紙は数学2枚、英語2枚（罫線入り）が配布されていることを確かめること。
5. 数学の解答は2枚とじ答案用紙に記入し、1問ごとに別のページを用いること。英語の解答は罫線入りの2枚とじ答案用紙に記入し、同じく1問ごとに別のページを用いること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**（数学または英語）、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。

## 数学

[第1問]

$2 \times 2$  の実行列:  $A = \begin{pmatrix} 1 - \gamma \cos 2\phi & -\gamma \sin 2\phi \\ -\gamma \sin 2\phi & 1 + \gamma \cos 2\phi \end{pmatrix}$  に関する以下の設問に答えよ。ただし、 $0 < \gamma < 1$  であるものとする。

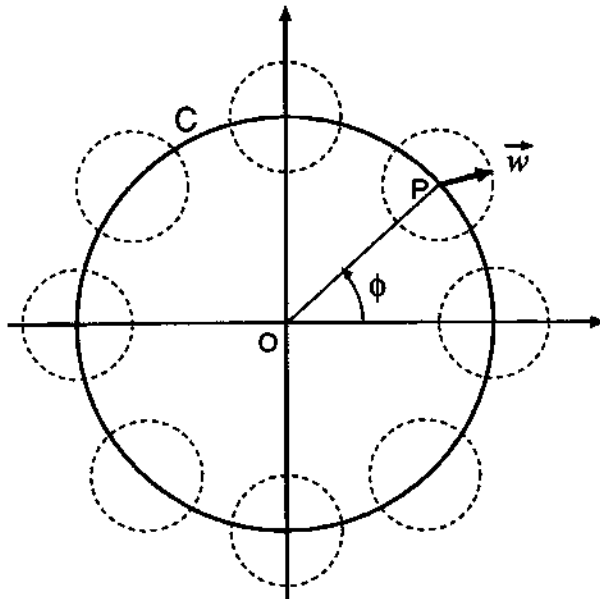
(i) 行列  $A$  の固有値  $\lambda_+$ ,  $\lambda_-$  を求めよ ( $\lambda_+ > \lambda_-$  とする)。

(ii)  $\lambda_+$  と  $\lambda_-$  に対応する規格化された固有ベクトル  $\vec{w}_+$ ,  $\vec{w}_-$  を求めよ。

(iii)  $UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$  のように  $A$  を対角化する行列  $U$  を求めよ。

また、この行列  $U$  が表す変換はどのような操作に対応しているか簡単に述べよ。

(iv) 下図のように、単位円  $C$  上の点  $P(\cos \phi, \sin \phi)$  において上述の行列  $A$  が定義されているものとし、この点  $P$  を原点とした任意のベクトル  $\vec{w}$  を点  $P$  を原点としたベクトル  $A\vec{w}$  へ変換する。この写像によって、図に点線で示された8つの円はどのように変形するか。答案用紙に簡単に図示して説明せよ。



[第2問]

三次元ラプラス方程式は、極座標を用いて

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{L}^2}{r^2}\right) U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$\hat{L}^2 \equiv - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (2)$$

と表せる。また、球面調和関数  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  は、

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (3)$$

を満たす ( $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$ )。

(i) ラプラス方程式の解  $U(r, \theta, \varphi)$  を  $R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  と変数分離したとき、 $R_\ell(r)$  の満たす微分方程式を求めよ。

(ii) 設問(i) で得られた微分方程式から  $R_\ell(r)$  の独立な二つの基本解  $A_\ell(r)$ ,  $B_\ell(r)$  を求めよ。

$U(r, \theta, \varphi)$  に対する境界条件が球面上で与えられれば、設問(ii) で得られた  $A_\ell(r)$  と  $B_\ell(r)$  を用いて、

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [\alpha_{\ell m} A_\ell(r) + \beta_{\ell m} B_\ell(r)] Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (4)$$

と展開し、境界条件に合うような係数  $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$  を持つ解を求めることができる。具体的に、 $r = a$  及び  $b$  (ただし  $b > a > 0$  とする) での境界条件が

$$U(a, \theta, \varphi) = 0, \quad U(b, \theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \quad (5)$$

と与えられているとき、以下の問いに答えよ。

(iii)  $\sin \theta \cos \varphi$  を  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  を用いて表せ。

ただし、 $Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ ,  $Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$  (複号同順),

$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$  を用いてよい。

(iv) 境界条件(5)と  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  の直交条件

$$\int d\Omega Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m} \quad (6)$$

から係数  $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$  を決定せよ。

英語

[第1問] 次の文章は 1938 年に理論物理学者 Fritz London (1900-1954) が液体ヘリウムの超流動転移の物理的起源を解明した論文から抜粋したものである。これを読み、以下の設問 (i)、(ii)、(iii) に答えよ。

In his well-known papers, Einstein has already discussed a peculiar condensation phenomenon of the 'Bose-Einstein' gas; but in the course of time the degeneracy of the Bose-Einstein gas has rather got the reputation of having only a purely imaginary existence. Thus it is perhaps not generally known that this condensation phenomenon actually represents a discontinuity of the derivative of the specific heat (phase transition of third order). In the accompanying figure the specific heat ( $C_v$ ) of an *ideal* Bose-Einstein gas is represented as a function of  $T/T_c$ , where

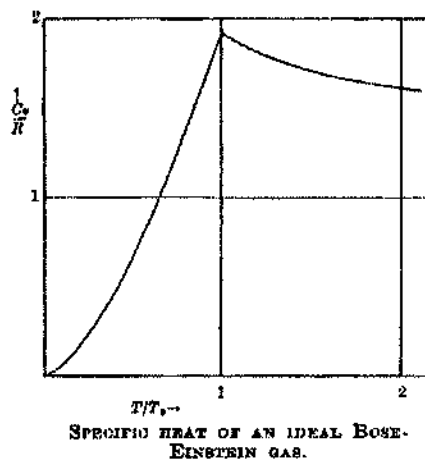
$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m^* k_B} \left( \frac{n}{2.615} \right)^{2/3}$$

With  $m^*$  = the mass of a He atom and with the molar volume  $\frac{N_A}{n} = 27.6 \text{ cm}^3$  one obtains  $T_c = 3.09 \text{ K}$ . For  $T \ll T_c$  the specific heat is given by

$$C_v = 1.92R(T/T_c)^{3/2}$$

and for  $T \gg T_c$  by

$$C_v = \frac{3}{2}R \left\{ 1 + 0.231 \left( \frac{T_c}{T} \right)^{3/2} + 0.046 \left( \frac{T_c}{T} \right)^3 + \dots \right\}$$



The entropy at the transition point  $T_c$  amounts to  $1.28R$  independently of  $T_c$ .

(ア) 液体ヘリウムの  $\lambda$  (ラムダ) 点は実際にはむしろ 2 次の相転移に近いが、ボース・アインシュタイン統計における凝縮現象との関係を連想しない方が難しいくらいである。 $\lambda$  点の温度 (2.17 K) とそこでのエントロピーの実験値 ( $\sim 0.8 R$ ) はこの考えを支持している。ただし、液体ヘリウムを理想気体として扱うような現実に比べて単純化し過ぎたモデルの場合、高温で  $C_v = (3/2)R$  となり、実験とは合わない。And also for low temperatures the ideal Bose-Einstein gas must, of course, give too great a specific heat, since it does not account for the gradual 'freezing in' of the Debye frequencies.

According to our conception the quantum states of liquid helium would have to correspond, so to speak, to both the states of the electrons and to the Debye vibrational states of the lattice in the theory of metals. It would, of course, be necessary to incorporate (イ) this feature into the theory before it can be expected to furnish quantitative insight into the properties of liquid helium.

$\lambda$  点: 液体ヘリウムの超流動転移点       $R$ : 気体定数  
Debye frequencies: デバイ周波数

- (i) アインシュタインの理論はこの London の論文が発表されるまで、どのように受け取られていたか簡単に説明せよ。
- (ii) 下線部 (ア) を英訳せよ。
- (iii) 下線部 (イ) の this feature とは何を指すか、説明せよ。

[第2問] 次の文章は、米国のある大学の附属実験施設のユーザー向け安全教育資料からの抜粋である。この英文を読んで以下の設問 (i)、(ii) に答えよ。なお、\*印のついた単語は文末の単語表を参考にしてよい。

Welcome to SSRL\*. We hope that your stay here will be enjoyable as well as safe. These guidelines are intended to call your attention to safety concerns which you may encounter at SSRL/SLAC\* and to encourage you to be alert for and avoid hazardous situations.

#### Construction Safety

Construction sites often present unfamiliar hazards at SSRL. (ア) In general, you should detour around construction sites. If your work requires you to enter a construction area, observe warning signs (HARD HAT\* AREA, etc) and watch for hazards overhead and underfoot.

#### Cryogenic\* Safety

The hazards from cryogenic substances are:

Extreme cold – Cryogenic liquid and their boil-off vapors can rapidly freeze skin and eye tissue. Wear insulated gloves and safety glasses when transferring liquid.

Expansion ratio – Use properly designed dewars,\* transfer lines with properly designed safety devices in working order. Never trap cold liquid in a closed volume without a relief valve. As the liquid warms the pressure can increase 1000 fold.

Asphyxiation\* – In small spaces (such as experimental hutches) ensure adequate ventilation. Boil-off vapors can displace air.

#### Electrical equipment safety

Normal safe laboratory electrical practice is expected of all staff and users at SSRL. The SSRL staff are available to assist with design and construction of equipment, particularly with regard to interlocks and other safety aspects. When working on equipment that could under unexpected energization or start up release energy that may cause injury to personnel, then application of the SLAC lock and tag program must take effect. (イ) This program is where the source of energy i.e. electrical, pneumatic,\* hydraulic\* is locked out in a safe position by the person working on the device. This assures that control of the energy source remains in the hands of the person working on the equipment and that the hazard has been disabled.

Emergency procedures: (ウ) If you encounter someone hung up on a live circuit, do not touch him! Either turn off the electrical source or use a non-conducting pole to break the connection. If the person is unconscious perform CPR\* if necessary and call for help. After an electrical shock, keep the victim warm and quiet. Get medical help.

SSRL: Stanford Synchrotron Radiation Laboratory

SLAC: Stanford Linear Accelerator Center

hard hat: ヘルメット

cryogenic: 低温の

dewar: デュワー (寒剤容器)

asphyxiation: 窒息

pneumatic: 空気圧の

hydraulic: 水圧 (油圧) の

CPR: 心肺蘇生

(i) 下線部 (ア)、(イ)、(ウ) を和訳せよ。

(ii) 寒剤の取り扱いに関する以下の質問に 20 words 以上の英文で答えよ。

What kind of hazard is expected if cold liquid is trapped in a closed vessel without a relief valve?