

平成14年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成13年8月28日（火） 12時30分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で9問ある。9問から**5問を選んで**解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計5枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に**科目名（物理学）、受験番号、氏名、問題番号**を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

問題 1

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad (1)$$

で記述される 1 次元調和振動子を考えよう。ここで \hat{p} は運動量演算子、 \hat{x} は位置演算子。この系は演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \quad (2)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \quad (3)$$

を用いて調べることが出来る。以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. (1) 式のハミルトニアンを a, a^\dagger を用いて表せ。また、 a, a^\dagger の物理的意味を述べよ。

2. 基底状態 $|0\rangle$ は関係 $a|0\rangle = 0$ を満たす。これを用いて座標表示の基底状態波動関数 $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ を求めよ。また、第一励起状態の波動関数 $\psi_1(x)$ を求めよ。ここでは規格化は考えなくてよい。

3. 基底状態 $|0\rangle$ に演算子 a^\dagger の指数関数をほどこして得られる状態

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle, \quad \alpha \text{ は任意の複素数} \quad (4)$$

はコヒーレント状態と呼ばれる。

(a) コヒーレント状態が演算子 a の固有状態になっていることを示せ。

(b) コヒーレント状態の内積 $\langle \beta^* | \alpha \rangle$ を計算せよ。
ただし $\langle \beta^* | = \langle 0 | \exp(\beta^* a)$ である。

(c) コヒーレント状態が n 番目の励起状態を含む確率を求めよ。

(d) コヒーレント状態について不確定性関係を調べよう。座標の期待値 $\langle \hat{x} \rangle \equiv \langle \alpha^* | \hat{x} | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle$ と座標の二乗の期待値 $\langle \hat{x}^2 \rangle \equiv \langle \alpha^* | \hat{x}^2 | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle$ を計算し、座標の不確定さの二乗

$$(\Delta x)^2 = \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle \quad (5)$$

を求めよ。

(e) 同様に運動量の不確定さの二乗 $(\Delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle$ を計算し、不確定関係を確かめよ。

問題 2

図のように、矢印で表される要素 N 個が x 方向に繋がった鎖状分子を考える。各要素はそれぞれ長さ b で、矢印の先端に電荷 $Q (> 0)$ をもつ。各要素は、矢印が $+x$ 方向に向くか、 $-x$ 方向に向くかの二つの状態のみ取りうるものとする。これを、 i 番目要素の状態変数 μ_i を導入し、 $\mu_i = +1$ または -1 で表す。1 番目要素の矢印の始点が点 $O (x = 0)$ に固定されていて、大きさ E の電場 ($E \geq 0$) が $+x$ の向きにかけられているものとする。また、この鎖状分子は温度 T の熱浴に接しているものとする。

電荷は外部電場 E とだけ相互作用し、電荷間の相互作用は無視できるものとする。また、 x と垂直方向への分子の広がりは無視できるものとし、ボルツマン定数を k_B として、以下の間に、解答に至る道筋を添えて答えよ。

1. まず、 $E = 0$ の場合を考える。

(a) 分子の端点の位置 x_N の関数としてこの分子のエントロピー S を求めよ。ただし、 $L = bN$ とし、 $N, x_N/b \gg 1$ であるとして、必要であれば Stirling の公式、すなわち、 $x \gg 1$ のとき

$$\log x! \sim x \log x - x + \dots$$

を用いよ。

(b) 端点位置を x_N に保つために、この端点に加えなければならない力 X と x_N との関係を導け。

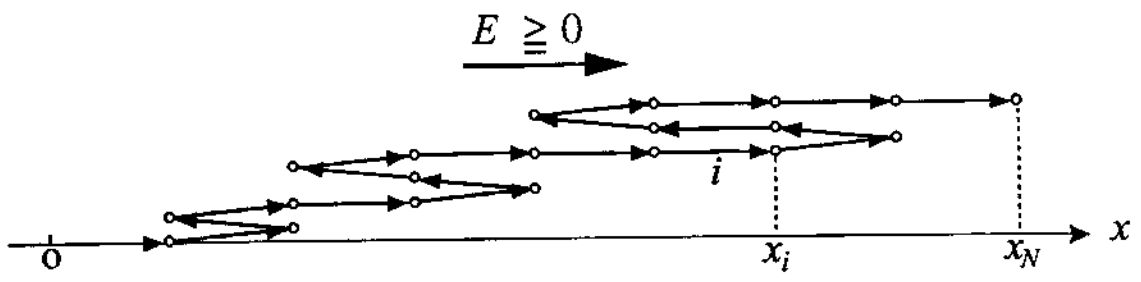
(c) $N \gg x_N/b (\gg 1)$ の場合、 X と x_N との関係式は近似的にどのように与えられるか。 x_N を外力 X に対する分子の伸びとみたとき、この分子はどのような弾性体と言えるか。

2. 次に、 $E > 0$ の場合を考える。

(a) E が与えられたもとでのこの鎖状分子の分配関数 Z_N を、変数 $A \equiv bQE/k_B T$ を用いて表せ。

(b) i 番目要素の μ_i の平均値 $\langle \mu_i \rangle$ を求めよ。

(c) この鎖状分子の長さの平均値 $\langle x_N \rangle$ について、電場が十分小さい極限、 $NA \ll 1$ 、での表式を求めよ。 $\langle x_N \rangle$ を外力の総和 NQE に対する分子の伸びとみたとき、前問 1(c) との関連を論ぜよ。



問題 3

角振動数 ω の単色電磁波が真空から誘電体に入射する場合を考える。Maxwell の方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) &= \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t}\end{aligned}$$

ここで \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁場、 ϵ は誘電率、 μ は透磁率を表す。図のように、3次元空間において $x < 0$ が真空、 $x > 0$ が誘電体であるとする。真空の誘電率、透磁率をそれぞれ ϵ_0 , μ_0 で表し、誘電体の誘電率は $\epsilon_1 (> \epsilon_0)$, 透磁率は μ_0 で与えられるものとする。電場、磁場はそれぞれ、入射波に対しては $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)$ 、屈折波に対しては $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$ 、反射波に対しては $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t)$ とする。以下の問に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. 真空と誘電体の境界 $x = 0$ において、

$$E_{0,t}(0, y, z, t) + E_{2,t}(0, y, z, t) = E_{1,t}(0, y, z, t) \quad (1)$$

$$\epsilon_0 [E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \epsilon_1 E_{1,x}(0, y, z, t) \quad (2)$$

$$B_{0,t}(0, y, z, t) + B_{2,t}(0, y, z, t) = B_{1,t}(0, y, z, t) \quad (3)$$

が成立する。ここで添字の t は各ベクトルの真空と誘電体の境界に平行な成分、添字の x は x 成分を表す。

- (a) (1) 式が成立することを示せ。

- (b) 誘導電荷密度 ρ と電場 \mathbf{E} の間には関係式 $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ が成立する。誘電体の表面 ($x = +0$) における電荷の面密度 $\sigma(y, z, t)$ を $E_{1,x}(0, y, z, t)$ 、 ϵ_0 、 ϵ_1 を用いて表せ。

2. 入射波の方向が xy 面にあるように座標軸をとり、 x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} で表す。入射波の進行方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}_0 = \hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) とし、入射波の磁場 $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)$ が z 方向に直線偏光している場合、

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) = \hat{z} B_0 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

を考える。入射波の電場は、

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

と表す。

- (a) k_0 を ω , ϵ_0 , μ_0 を用いて表せ。
 (b) 入射波の電場の振幅 E_0 を B_0 , \hat{z} , k_0 , \mathbf{n}_0 , ω を用いて表せ。
 3. 屈折波、反射波の磁場をそれぞれ、

$$B_1(\mathbf{r}, t) = \hat{z} B_1 \exp [i(k_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

$$B_2(\mathbf{r}, t) = \hat{z} B_2 \exp [i(k_0 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

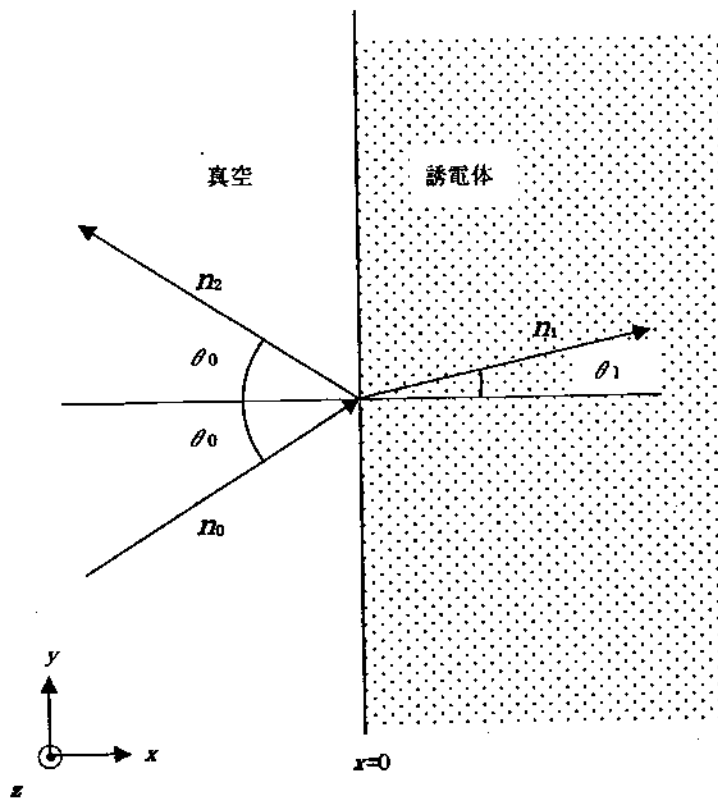
と表す。 \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 はそれぞれ屈折波、反射波の進行方向の単位ベクトルであり、これらを

$$\mathbf{n}_1 = \hat{x} \cos \theta_1 + \hat{y} \sin \theta_1$$

$$\mathbf{n}_2 = -\hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0$$

と表す。

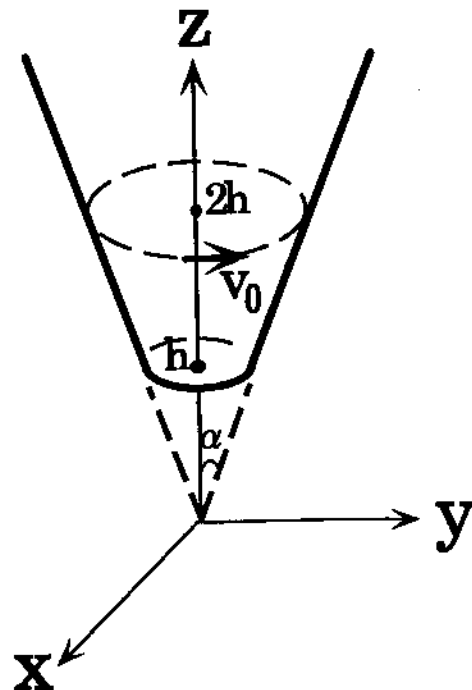
- (a) (3) 式を用いて入射角 θ_0 と屈折角 θ_1 の関係式を求めよ。
 (b) (1) 式と (3) 式を用いて B_1 、 B_2 を求めよ。答えは k_0 、 k_1 、 θ_0 、 θ_1 、 B_0 を用いて表せ。
 (c) $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ のとき、何が起こるか。



問題 4

図のように頂角が α の円錐を切り、鉛直軸に沿って逆さにして作った漏斗状の滑らかな面がある。切り口の高さを h として、この斜面上の質量 m の質点の運動を考える。以下の問に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

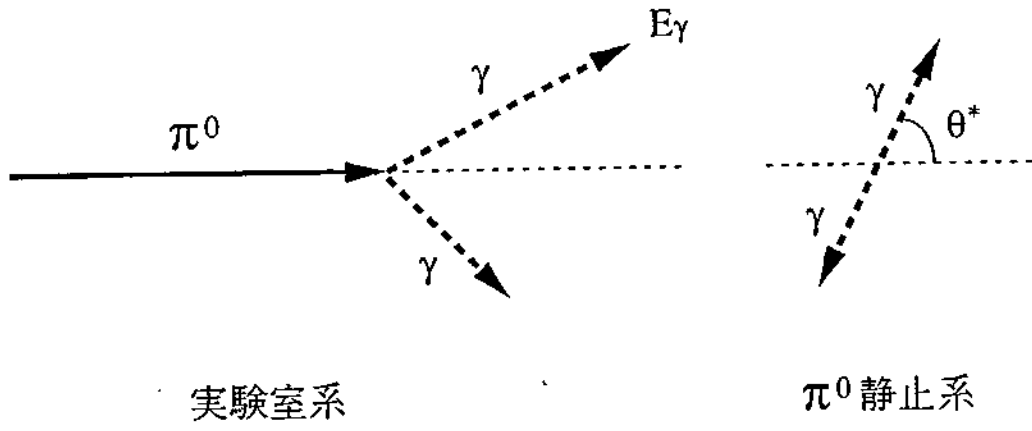
1. 鉛直方向に z 軸をとり、質点の座標を円柱座標 (z, θ) で表したとき、質点の斜面上の運動のラグランジアンを求めよ。ただし、重力の加速度定数を g とする。
2. この系の保存量を求めよ。
3. 質点が高さ $2h$ の斜面上で水平に初速度 v_0 で運動を始めたとする。初速度の違いによる質点の運動の違いについて述べよ。



問題 5

パイ中間子に関連する以下の問に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

- 陽子ビームを水素ターゲットに当てて中性パイ中間子 π^0 を生成するための、陽子ビーム運動エネルギーのしきい値を求めよ。但し、陽子の質量は $940 \text{ MeV}/c^2$ 、 π^0 の質量 (m_π) は $135 \text{ MeV}/c^2$ とする (MeV は 10^6 電子ボルト)。
- π^0 は2つの光子 (γ) に崩壊し、 γ の角分布は π^0 の静止系で等方的であることが知られている。
 - エネルギー E_π の π^0 からの崩壊における γ のエネルギー E_γ を、 π^0 の静止系での γ の放出角 θ^* (図参照) で表わし、 E_γ の分布が一樣であることを示せ。
 - エネルギー 30 GeV の π^0 の崩壊において、2光子の間の角度の最小値を求めよ (GeV は 10^9 電子ボルト)。
 - 一般に、高エネルギー $\pi^0 (E_\pi \gg m_\pi c^2)$ の崩壊で2光子の間の角度分布は、その最小値の近くに鋭いピークを持つ。この理由を説明せよ。
- 重水素に負電荷のパイ中間子 π^- を吸収させることによりパイ中間子原子が作られ、これが2個の中性子となる反応 ($\pi^- + d \rightarrow n + n$) が実際に観測されている。
 - π^- のパリティを P_π とした時、この反応の始状態の全角運動量とパリティを求めよ。ただし、この反応は π^- がパイ中間子原子の基底軌道に落ちてから起こるとし、また、 π^- のスピンは0、重陽子は陽子と中性子の 3S_1 の束縛状態であり、陽子と中性子のパリティは等しいことが知られているものとする。
 - 中性子はスピン $1/2$ のフェルミ粒子であることから、終状態の全スピンと軌道角運動量の間になどどのような関係があるかを述べよ。
 - 全角運動量が保存されることから導かれる、終状態がとりうる可能な全スピンと軌道角運動量の組み合わせをすべて記せ。
 - これらより、 π^- のパリティを決定せよ。



問題 6

1. 以下の問に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

(a) ある気体の圧力が 1.0×10^{-5} Pa、温度は 0°C の状態にある。この気体 1.0cm^3 中に気体分子は何個あるか。ここで、気体は理想気体とみなせるとし、1気圧を 1.0×10^5 Pa、アボガドロ数を 6.0×10^{23} 個、標準状態 (0°C 、1気圧) の理想気体 1モルの体積を 22l とする。

(b) 加速された電子がこの気体分子に衝突すると、電子の運動エネルギーによって分子は電離してイオンとなる。この気体中で長さ 1.0cm をもつ領域に電流密度 $1.0\text{mA}/\text{cm}^2$ の電流が流れているとき、単位体積あたり 1秒間に何個のイオンが生成されるか。ここで、この電子の衝突による分子の電離断面積を $3.0 \times 10^{-16}\text{cm}^2$ とし、素電荷を $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ とする。また、電流の流れている体積内の圧力は常に一定で、生成されたイオンは直ちに遠方に飛び去り、単位体積内では電子と気体分子の衝突は最大 1回までとする。

2. 高真空で使用する電離真空計では、電離させた残留気体分子によるイオン電流を測定し、その電流値を真空度に換算している。

(a) 次ページの図は、電離真空計の模式図である。この真空計の動作原理を図中のフィラメント、グリッド、コレクターという言葉を使用して説明せよ。

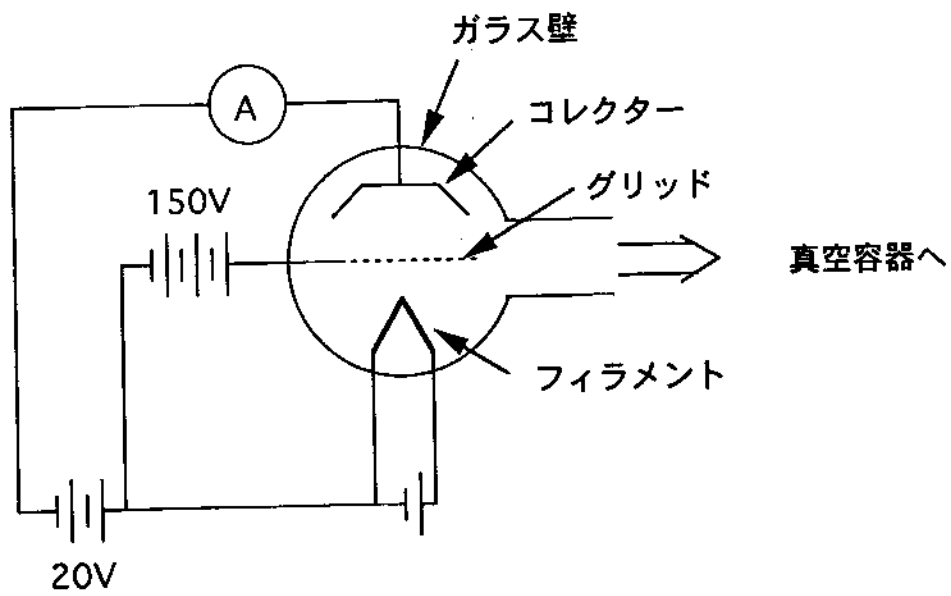
(b) 表には、ある電離真空計において、希ガスの真空度 1.0×10^{-6} Pa のとき検出されるイオン電流値が、希ガス原子の種類別に示されている。このように希ガス原子の種類によってイオン電流値が異なる理由を定性的に説明せよ。

気体	He	Ne	Ar	Kr	Xe
イオン電流値 (nA)	0.1	0.3	1.3	1.7	2.4

(c) 電離真空計では、フィラメントから放出された電子がグリッドに衝突する際に発生する軟X線が原因となってイオン電流以外の電流が流れ、正確な真空度が測定できない。どのような電流が発生するかを述べよ。また、この効果を減少させ、高い真空度まで測定できるようにするためには、フィラメント、グリッド、コレクターのうちどれかを工夫すればよい。どのようにすればこの効果を減少させることができるかを述べ

よ。

3. 電離真空計はロータリーポンプで排気できる程度の真空では通常使用しない。その真空度で利用できる真空計をひとつ例にあげて、その動作原理を簡単に説明せよ。



問題 7

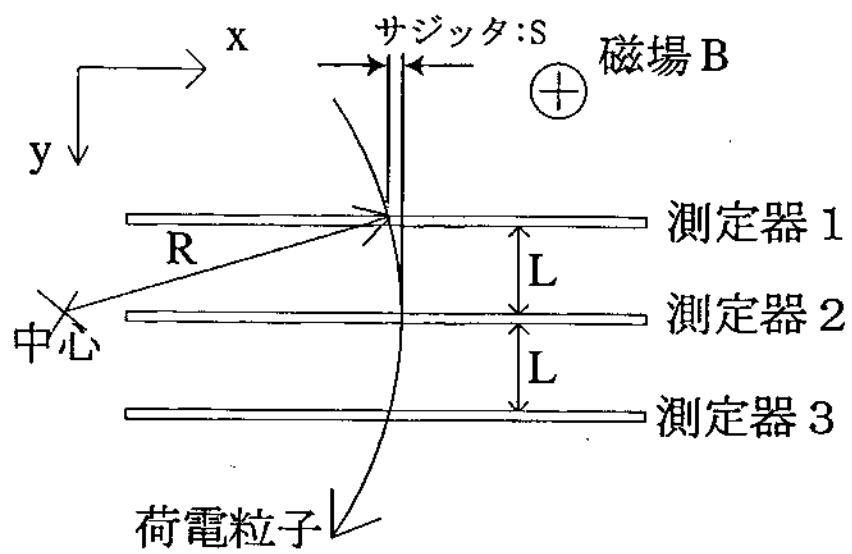
電子と同じ電荷 e を持ち運動量 p [GeV/c] を持つ素粒子が一様磁場 B [Tesla] のもとで円運動をする。円運動の半径 R [m] は

$$R = \frac{p}{0.3B} \quad (1)$$

に従う。

図の様な装置を考える。磁場 B は紙面に垂直方向を向いており、3枚の平板状の位置検出器を、図の紙面では垂直に、等間隔 L で設置してある。矢印のついている円弧は荷電素粒子の軌跡である。なお、 L は円運動の半径 R に比べて十分小さい場合を考える。この様な装置をマグネティック・スペクトロメータと呼んでいる。以下で、各位置検出器は有限な位置分解能をもつとして運動量測定について考えるが、運動量の測定誤差を δp とした場合に $\delta p/p$ を運動量分解能と定義する。以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. よりよい運動量分解能を得るためには強い磁場、測定器のより広い間隔、よりよい位置分解能が必要であることを直観的に説明せよ。また、運動量が小さい場合と大きい場合とどちらが運動量分解能が高いか答えよ。
2. 以上の傾向を定量的に調べるために以下の設問に答えよ。なおここでは簡略化のため、荷電粒子は x - y 面内に入射し、円運動の中心は図の様に2の測定器面上にあるとする。まず、図の S をサジッタと呼ぶ。
 - (a) サジッタ S を L と R の関数で表せ。 $L \ll R$ であることを考慮して近似をもちいること。さらに、(1)式を用いてサジッタ S を L と p の関数で表せ。
 - (b) サジッタに誤差 δS があると考え、 δp を $L, B, p, \delta S$ の関数で表せ。
 - (c) この誤差の原因は測定器による誤差である。測定器1、2および3は、等しい z 座標をもつ面上において x 方向のみ測定するとし、各測定器の位置分解能 (x 方向) は同じ値 σ を持つと仮定して、サジッタ S の誤差 δS を σ の関数で表せ。
 - (d) 以上により、 $\delta p/p$ を L, B, p, σ の関数で表せ。
3. 現実に、マグネティック・スペクトロメータを設計する際に、上記以外の要因も含めて、どの様な点に留意せねばならないかを論ぜよ。



問題 8

1. 図 (a) のような幅 L 、高さ U_0 の箱形ポテンシャル障壁に、左側から入射するエネルギー $E (U_0 > E > 0)$ をもつ粒子の 1 次元的な運動を考える。以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。なお、入射粒子の波動関数を e^{ikx} (ただし、 $\hbar^2 k^2 / 2m = E, k > 0, m$ は粒子の質量) とする。電子間相互作用は無視してよい。

(a) $x < 0, 0 \leq x \leq L, x > L$ の各領域における粒子の波動関数をそれぞれ $\phi_I(x), \phi_{II}(x), \phi_{III}(x)$ として、その一般的な関数形を書け。例えば、 $Ae^{ikx} + \dots$ のように、適当な係数 A, \dots を使って記述してよい。

(b) 関数 $\phi_I(x), \phi_{II}(x), \phi_{III}(x)$ が満たすべき境界条件を書け。

(c) 電荷 $-e$ をもつ電子が右方へ入射するときに、障壁の透過率を T として、単位時間あたりに障壁を透過する電子の電荷の総量 (電流) j を求めよ。但し、エネルギー E をもつ電子は単位長さ当たり n の密度をもつとする。

2. この系に電子を詰めた場合の電気伝導を考えよう。なお、全電子の密度を N 、電子のスピン縮重度を 2 とする。

(a) 先ず、1 次元自由電子気体の、エネルギー E に対する単位長さ当たりの状態密度 $D(E)$ 、及び絶対零度におけるフェルミ速度 v_F を、 m, \hbar (プランク定数), N を用いて表せ。

(b) 図 (a) に示した、障壁がある系におけるエネルギー分布を図 (b) のように表す。すなわち、障壁の左側と右側の電子のフェルミ・エネルギーを、それぞれ E_{FL}, E_{FR} 、温度 T における分布関数をそれぞれ $f_L(E, T), f_R(E, T)$ とする。なお、電子気体は低温で縮退しているものとする。このとき、1 次元導体を左から右へ流れる全電流 J は、障壁を境として左から右に流れ込む電子による全電流 J_{LR} と、右から左に流れ込む電子による全電流 J_{RL} の差 ($J = J_{LR} - J_{RL}$) として与えられる。 J_{LR} は

$$J_{LR} = -\frac{e}{2} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) f_L(E, T) [1 - f_R(E, T)] T(E) dE \quad (1)$$

で与えられることを説明せよ。

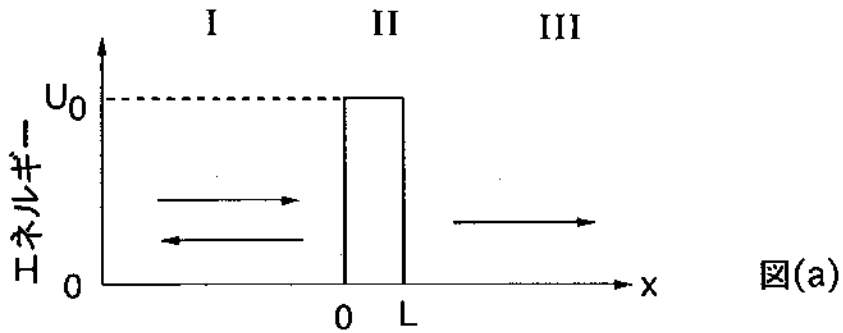
(c) 図 (c) に示すように、障壁の両端間に僅かの電圧 ΔV を加えて左側の電子のフェルミ・エネルギーを右側より $\Delta\mu (\ll E_{FL} \approx E_{FR})$ だけ高く

すると、全電流が ΔJ だけ発生する。温度を絶対零度として ΔJ を計算し、 $G = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta J / \Delta V$ で与えられる電気伝導度が

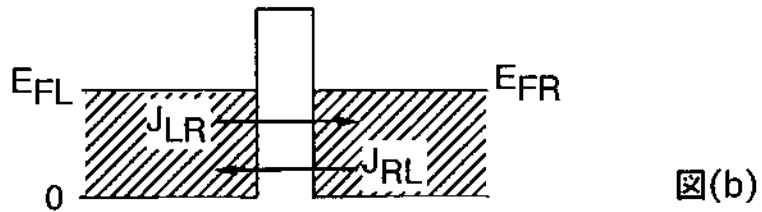
$$G = \left(\frac{2e^2}{h} \right) T(E_{FL})$$

と表せることを示せ。なお、 $\Delta\mu$ と ΔV の間には $\Delta\mu = -e\Delta V$ の関係がある。

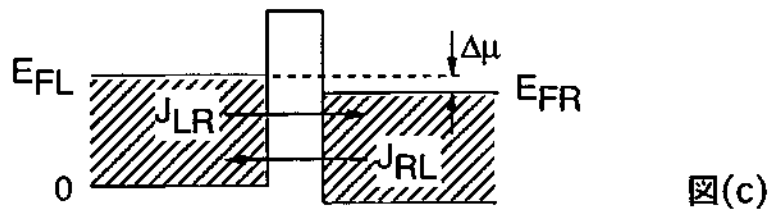
3. 上記のような導体系を作るために、材料として Fe と n 形 Si を準備した。しかし、両材料は見かけが似ているので区別がつかなくなってしまった。物理的な測定によって、両者を見分けたい。Fe、n 形 Si を区別するために行うべき実験を 2 つ挙げよ（理由も添えて、各 40 字以内で）。ただし、比重、硬度、光沢、化学反応の違いは除く。



図(a)



図(b)



図(c)

問題 9

1. 神経細胞の膜電位は、細胞膜をはさむ細胞内外のイオン濃度差および細胞膜の選択的イオン透過性に依存している。

(a) 1 mol の溶質が細胞内へと細胞膜を通過する際の自由エネルギー変化 ΔG は

$$\Delta G = -2.3RT \log_{10}(C_o/C_i) + zFV$$

で表される。ここで $R = 2.0 \times 10^{-3}$ kcal / K · mol は気体定数、 T は K で表した絶対温度、 C_o は細胞外部での溶質の濃度、 C_i は細胞内部での溶質の濃度、 z は溶質のもつ電荷の価数、 $F = 23$ kcal / V · mol はファラデー定数、 V はボルトで表した膜電位（細胞内電位）である。この式より、イオンの平衡電位を表すネルンストの式を導け。

(b) 静止状態において、神経細胞の細胞内電位は細胞外に対して負である。これは静止時の細胞膜が、或るイオン種に対して特に高い透過性をもつからである。下の表は、ヤリイカの巨大軸索における細胞内外の主なイオン種の濃度を示したものであるが、これを参照し、細胞膜が上記のイオン種のみを通ずとした場合、その膜電位（細胞内電位）をネルンストの式を用い求めよ。ただし温度は 20 °C とせよ。

イオン種	細胞内 (millimol/l)	細胞外 (millimol/l)
K ⁺	400	20
Na ⁺	50	440
Cl ⁻	51	560

(c) 活動電位（神経インパルス）の発生時においては、膜電位は一過性に正となる。この際起こる膜のイオンの透過性の一連の変化について、その分子機構を含め説明せよ。

(d) 神経インパルスは通常軸索基部において発生し軸索先端部へ向かい一方に伝播する。途中から反対方向へと逆行しない理由を述べよ。

2. ショウジョウバエの *eyeless* 遺伝子の機能欠失変異体では眼の形成が起こらなくなる。

(a) このことは *eyeless* 遺伝子が眼の形成に必要なことを示している。さらにこの遺伝子が眼の形成に十分な働きをもつかを調べる

にはどのような実験を行えばよいかを述べよ。

- (b) 上記の実験から *eyeless* 遺伝子は眼の形成に必要なかつ十分な活性をもつことが知られている。またこの遺伝子はある種の転写因子をコードすることが分かっている。以上のことから *eyeless* 遺伝子の働きについて推察せよ。