平成１２年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数　学　・　物　理

平成１１年８月２４日（火）　９時００分～１２時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。

2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。

3．問題は全部で６問ある。６問のすべてに解答せよ。

4．答案用紙は３枚とじの同じものが２組（合計６枚）配布されていることを確かめること。

5．数学の解答は一方の３枚とじ解答用紙に記入し、１問ごとに別のページを用いること。物理の解答は他方の３枚とじ解答用紙に記入し、同じく１問ごとに別のページを用いること。

6．各答案用紙の所定欄に**科目名(数学または物理)**、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。

7．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。

8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。

9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。

10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。

数　学

[第１問]

２次元空間におけるベクトル場 $\mathbf{E}(x,y)$ の各成分 $E_x(x,y), E_y(x,y)$は、必要な階数まで微分可能であるとして、以下の設問に答えよ。

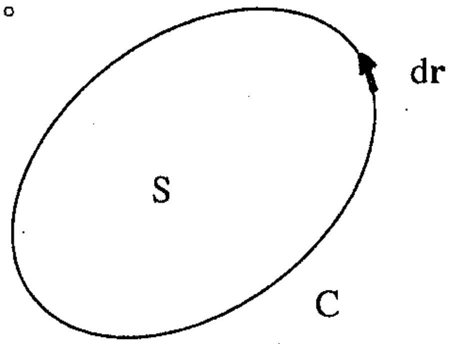
（１）$\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=0$ のとき、あるスカラー場 $\varphi(x,y)$ が存在して、

$\mathbf{E}=\mathrm{grad}\varphi=(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y})$ とあらわせることを示せ。

但し、次の関係を用いて良い。

$$\iint_S(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\oint_C(E_x\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}y)$$

ここでＳは閉じた道Ｃで囲まれる領域の内部であり、線積分の向きは反時計回りである。



（２）$\mathbf{E}=(x^2-y^2,-2xy)$のとき $\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=0$ となることを示し、設問（１）における$\varphi(x,y)$を求めよ。

（３）点(x,y)における接線が、設問（２）の $\mathbf{E}(x,y)$ と平行になる曲線群 $\psi(x,y)=a$ （a＝定数）を決定せよ。

数　学

[第2問]

（1）　行列

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

（2）　次の行列

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

により、設問（1）の行列$\mathbf{A}$を変換して得られる行列$\mathbf{B}=\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{+}$を考える。ただし$\mathbf{X}^{+}$　は　$\mathbf{X}$　のエルミート共役行列である。行列$\mathbf{B}$の固有値、固有ベクトルを示せ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

（3）　エルミート行列　$\mathbf{A}=(a_{ij})$　$(i,j=1,\ldots,n)$の固有値をα_i　$(i=1,..,n)$とする。それらに関して次の2つの量、

$$F=\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i\right|^2 \quad , \qquad G=\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$$

を考える。設問（1）の$\mathbf{A}$に対して　FとGを求めよ。

（4）　設問（3）のFとGの関係を、一般のエルミート行列$\mathbf{A}$に対して述べよ。

数　学

[第３問]

時刻　t=0 において x=0 に強さ 1 の熱を加えたときの、１次元空間におけるその後の熱の伝導は、方程式、

$$\left(\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) G(x,t) = -\delta(x)\delta(t) \qquad (\kappa \text{は正定数}), \tag{1}$$

の解 $G(x,t)$ によって記述される。ただし、$\delta(x)$はディラックのデルタ関数である。また、$t=-\infty$　で　$G(x,t)$　$= 0$　とする。

（１）　$G(x,t)$　のフーリエ変換　$g(k,\omega)$を次の式で定義する：

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(k,\omega) \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \mathrm{d}k\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

このとき $g(k,\omega)$ の満たすべき方程式を式(1)より導き、$g(k,\omega)$を求めよ。

（２）　設問（１）で求めた $g(k,\omega)$を式(2)に代入し、ω積分を実行せよ。

（３）　設問（２）に続いて k 積分を実行し、$G(x,t)$を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2} \mathrm{d}\alpha = \sqrt{\pi} \tag{3}$$

を用いてよい。

物 理 学

[第 1 問]

ロケットを垂直上方に打ち上げて、地球の重力圏を脱したい。時刻tにおけるロケットの高さ、速度および質量をそれぞれ$h(t)$、$v(t)=\frac{dh}{dt}$、$M(t)$、ロケットから噴射されるガスの、ロケットに対する相対速度をuとする。重力加速度を$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$、地球の半径を$R=6370\ \mathrm{km}$として、以下に答えよ。なお、相対速度uは一定であるとし、空気抵抗は無視せよ。

(1) 地球の重力圏を脱出するためには噴射が終わったときの速度がある値（脱出速度：v_{esc}）を越えている必要がある。噴射終了時の高度はRに比べて十分小さいとしてv_{esc}を求めよ。

(2) ロケットの運動方程式は、

$$M\frac{dv}{dt}=-u\frac{dM}{dt}-Mg$$

で与えられる。この式を導け。

(3) 燃料の噴射時間をΔtとし、噴射開始時および噴射終了時の全質量をそれぞれ、$M_i=M(t_0)$、$M_f=M(t_0+\Delta t)$とおくとき、この間の速度変化$\Delta v=v(t_0+\Delta t)-v(t_0)$を求めよ。また、噴射時間内の速度変化$\Delta v$を増やすにはどうしたらよいかを述べよ。

(4) 簡単のため、ロケットの加速度は一定であるとし、$\frac{dv}{dt}=ng$とおく。ここに、加速度係数nは、乗組員や機内の装置に支障が生じないように選ばれた定数である。噴射開始時の質量M_iと噴射終了時の質量M_fの差がすべて燃料であるとして、燃料噴射時間Δt、噴射による速度変化Δv、および高度変化Δhを求めよ。

(5) 燃料の燃焼温度をT Kとするとき、燃料ガスの噴射速度uは、燃料の分子がこの温度の下でもつ平均の運動エネルギーから決まる平均速度を超えられない。燃料分子の質量をm、ボルツマン定数をkとして、燃料分子の平均速度u_0をあらわせ。また、$u=u_0$が実現できたとして、燃料ガスの噴射速度を大きくするには、どうしたらよいかを述べ、最良の燃料として何を選んだらよいかを言え。

(6) 燃焼温度を$T=2000\mathrm{K}$、$k=1.4\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$、陽子の質量$m_p$を$1.7\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$で与えるとき、設問 (5) で選んだ燃料から期待される最高噴射速度を求めよ。

(7) 実際のロケットでは、構造上、噴射開始時および噴射終了時の全質量の費$\frac{M_i}{M_f}$は、高々4ていどにしかできない。燃料ガスの噴射速度を$u=3\mathrm{km/s}$、加速度係数を$n=4$として、期待される最終速度を求め、脱出速度と比較せよ。この結果と設問 (5) と (6) の結果から、脱出速度を得るためにどういう工夫をしたらよいかを論ぜよ。ただし、$\ln 2=\log_e 2=0.7$とおけ。

物理学

[第 2 問]

半径 a の円形断面を持つ無限に長い直線導線がある。電流が流れていないとき、導線内の電荷分布は一様で、正電荷密度は $\rho_+ = \rho_0$、伝導電子による負電荷密度は $-\rho_- = -\rho_0$ であるが、電流を流すと、負電荷密度 $-\rho_-$ には $-\rho_0$ からのずれが生じる。これに関連した次の各設問に答えよ。導線の内外で誘電率および透磁率は、それぞれ真空での値 ε_0, μ_0 を用いてよい。

(1) 外部電場が加わると電子は平均の移動速度（ドリフト速度）で流れる。この結果生ずる一様で定常な電流密度 j を電子の電荷密度 $-\rho_-$ と電子のドリフト速度 $v(>0)$ で表せ。

(2) この電流が導線の内外につくる磁場（磁束密度 B）を、導線の中心からの距離 r の関数として求め、その向きを図示せよ。

(3) この磁場が導線内の一個の伝導電子に作用するローレンツ力の大きさを、電子のドリフト速度 v と磁場の大きさで表し、その向きを図示せよ。

(4) 伝導電子は、設問 (3) で求めた磁場からのローレンツ力を受けているにもかかわらず定常的に運動している。それは磁場のローレンツ力をうち消す電場がつくられているからである。この電場を求め、その向きを図示せよ。

(5) これまでの結果をもとに、電流が流れると電荷分布がどう変化するかを簡潔に説明せよ。

(6) 実際に変化した電荷分布を求めよ。ただし、正電荷密度を ρ_+、負電荷密度を $-\rho_-$ とおき、各電荷密度を ρ_0 と v で表し、電流が流れていない場合からの変化を求めよ。

(7) 断面積 $1\ \mathrm{mm}^2$ の銅線に $1\ \mathrm{A}$ の電流が流れるときの電子のドリフト速度を計算し、上で求めた電荷密度の変化の割合を評価せよ。ただし、銅の質量密度は $9 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$、原子量は 63.55 であり、原子 1 個あたり自由電子が 1 個あるとする。また、素電荷は $1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$、アヴォガドロ定数は $6 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$、真空の光速度は $3 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ とする。

物 理 学

[第 3 問]

(1) 図1に示すような実験器具で、単色光を使ったヤングの干渉実験を行った。光を単スリットAに通した後、複スリットB、Cを通過させると、複スリットから回折した光が干渉し、その結果、スクリーン上に明暗の干渉縞ができた。複スリットBとCの間隔は、$d = 30\ \mu\mathrm{m}$、複スリットとスクリーンとの間の距離は、$a = 5\ \mathrm{cm}$ であった。光は赤色で、波長は $\lambda = 0.6\ \mu\mathrm{m}$ である。この時、スクリーン上で観察される干渉縞の間隔（明線と明線の間隔）s を求めよ。B、Cの各々のスリットの幅は十分狭いとしてよい。

(2) 次に、図2に示すような配置に変えた（垂直上方から見た図）。つまり、図1のスクリーンの位置にレンズを置き、スクリーンをその後方に移動させ、複スリットの拡大像をスクリーンに写し出した。使用したレンズは、直径 $L = 2\ \mathrm{cm}$ で焦点距離 $f = 4.5\ \mathrm{cm}$ のものである。この時、ピントのあった像を得るには、レンズとスクリーンの間の距離 b を何 cm にすればよいか。また、スクリーン上に輝線として写し出された複スリット像の間隔 D は何 mm か。

(3) 図2の配置のまま、複スリットを、BとCの間隔 $d = 2\ \mu\mathrm{m}$ のものに交換した。すると、スクリーン上に写し出された複スリットの像が2本の輝線ではなく、1本の輝線として観察された。ルーペでスクリーン上の像を拡大してみても、輝線は1本のままであった。なぜ、複スリットの間隔が狭い場合には2本の輝線に分離して観察されないのか、理由を説明せよ。

(4) スクリーン上で2本の輝線として観察される複スリットの最小間隔 d_0 を求めよ。

(5) 設問 (3) の観察で、d_0 が狭い場合でも複スリットの像が2本に分離された輝線としてスクリーンに写し出されるようにしたい。光源の波長を変えない場合、どのような工夫をすればよいか。また波長を変えて良い場合は、どのようにすればよいか。各々理由をつけて答えよ。

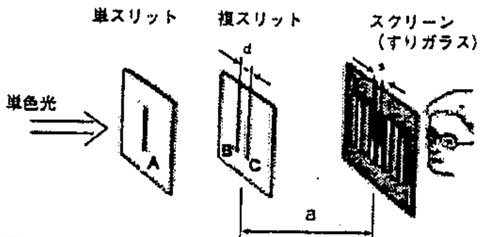


図1

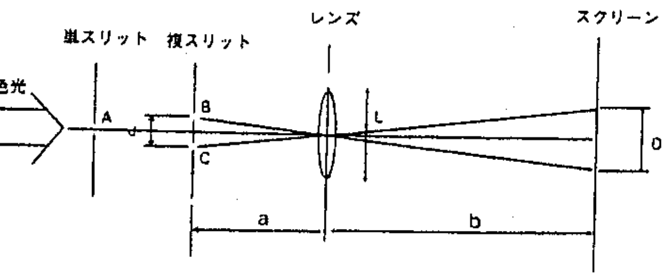


図2