平 成 8 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

[注意事項]

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用せよ。
3．問題は全部で３問ある。３問のすべてに解答せよ。
4．答案用紙を、各問につき１枚、合計３枚配布してあるから、確実に配布されていることを確かめよ。
5．各答案用紙の所定欄に、受験番号および氏名を必ず記入せよ。
6．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用せよ。
7．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に受験番号・氏名を記入して提出せよ。
10．答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題冊子の中にある）。

数　学　(平成7年8月)

次の3問の全部について解答せよ。解答は，各問ごとに別々の答案用紙を使うこと。

[第1問]　時間 t の関数 $y(t)$ に関する非線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\varepsilon y^3$$

を，$t=0$ における初期条件

$$y=1,\ \frac{dy}{dt}=0$$

のもとで考察する。ただし，ε は微小な正の定数とする。必要なら，iを虚数単位として，恒等式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

を用いて，以下の設問に答えよ。

(a) y を ε に関し，

$$y(t;\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(t)$$

と展開するとき，y_0，y_1 に対する方程式および初期条件を求めよ。

(b) 前問の各方程式を解き，y_0，y_1 を求めよ。

(c) 前問の結果より，この展開にもとづく解の適否を，t が大きくなった場合について論ぜよ。

［第２問］3行2列の実行列Aを

$$A = U \Lambda V^{\mathrm{T}} \qquad (1)$$

のように分解することを考える。ただし，添字Tは転置行列を表し，U，Λ，Vはそれぞれ3行2列，2行2列，2行2列の実行列で，

$$V^{\mathrm{T}}V = VV^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \quad \text{を仮定する。}$$

(a)　(1)式のように分解ができたとして，行列 $A^{\mathrm{T}}A$ のすべての固有値とそれに対応する固有ベクトルとを，U，Λ，V，λ_1，λ_2 を用いて表せ。必要なら単位ベクトル

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いてよい。

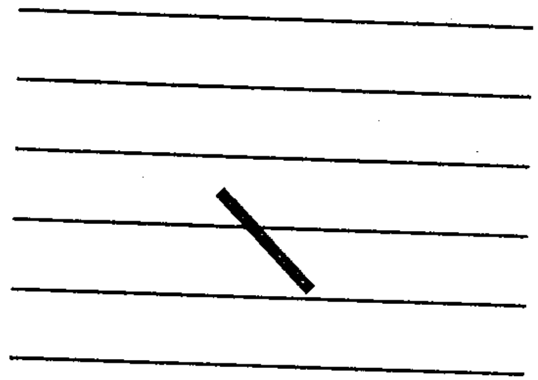
(b)

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}, & \dfrac{3-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}, & \dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, & \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

のとき，$A^{\mathrm{T}}A$ の固有値および長さ１の固有ベクトルをすべて求めよ。ただし，各固有ベクトルの第１要素は非負とする。

(c) 前問で与えられた行列Aに対して，(1)式を満たすU，Λ，Vを求めよ。ただし，Vの第１行の各要素は非負とする。

［第３問］床一面に引かれた間隔 a の平行線に上から長さ $l\,(\geq a)$ の棒を落したとき，棒が平行線と交わる確率 $P(l)$ を以下の手順にしたがって求めよ。



(a)　棒の一端が平行線から x の距離 $(0 \leq x \leq a/2)$　にあるときに，棒が平行線と交わる確率 $p(x)$ を求めよ。ただし，棒の方位角は床面内で一様に分布するものとする。また，棒の太さは無視する。

(b)　x が $[0, a/2\,]$ の区間で一様に分布するとして，$P(l)$ を求めよ。

平 成 8 年 度 入 学 試 験 問 題

物 理 学

[注意事項]

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用せよ。
3．問題は全部で3問ある。3問のすべてに解答せよ。
4．答案用紙を、各問につき1枚、合計3枚配布してあるから、確実に配布されていることを確かめよ。
5．各答案用紙の所定欄に、受験番号および氏名を必ず記入せよ。
6．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用せよ。
7．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に受験番号・氏名を記入して提出せよ。
10．答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題冊子の中にある）。

物　理　学 （平成７年８月）

[第１問]

真空中に二つの無限に長い導体の円筒Ａ（半径 a），およびＢ（半径 b）が同軸に配置されている。ただし、$a<b$ であり、円筒の厚さは無視できる。

(1) 円筒Ａに単位長さあたり正電荷 Q を与え、円筒Ｂを接地するとき、

イ） 円筒ＡとＢの間およびＢの外側の電場を求めよ。また、そのおおよその様子を図示せよ。

ロ） 二つの円筒間の単位長さあたりの静電容量を求めよ。

(2) 円筒の軸方向に一様に電流 I を流す。電流の向きが円筒ＡとＢで逆向きの場合に、

イ） 電流が円筒ＡとＢの間に作る磁束密度を求めよ。また、そのおおよその様子を図示せよ。

ロ） 円筒Ａの表面にはたらく圧力は、$\dfrac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$ であることを示せ。ただし、μ_0 は真空の透磁率である。

[第2問]
図に示すように、長さ ℓ、質量 M の一様な細い棒の両端がそれぞれ水平線（x 軸）上と鉛直線（y軸）上を離れないように拘束されて滑らかに動くようにしてある。棒の重心の座標を (x,y)、棒が鉛直線となす角を θ とする。

(1) 棒の中点を通り棒に垂直な軸に関する慣性モーメント I は $\frac{1}{12}M\ell^2$ であることを示せ。

(2) 力学的全エネルギーを書け。

棒が x 軸から受ける抗力を R_y、y軸から受ける抗力を R_x とする。

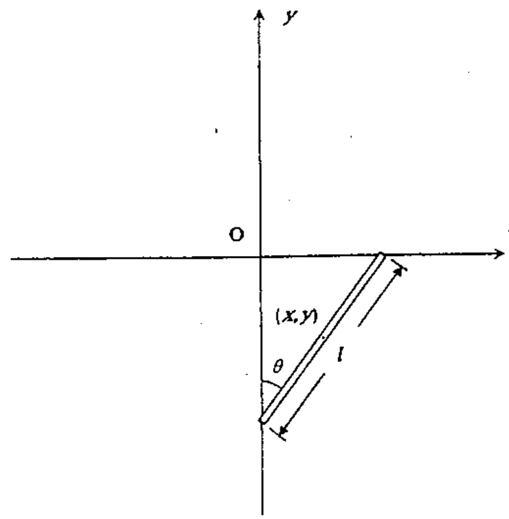
(3) x 、y、θ に対する運動方程式を書け。

(4) 設問 (2) で導いたエネルギーが保存することを運動方程式から示せ。

時刻 $t=0$ で $\theta=0$ に棒を置いて θ が増す向きに初期角速度 ω_0 を与えて放した。

(5) $t \geq 0$ での棒の角速度を θ と ω_0 で表せ。

(6) θ が小さいとき運動方程式を近似的に解き、θ を時刻 t の関数として与えよ。



[第3問]

Aさんは、おもちゃ屋でコップの水を飲む動作をいつまでも繰り返す鳥の形をしたおもちゃ（図I。**水飲み鳥**、と呼ぼう）を見つけた。なぜ動力も熱の供給もなしに動くかが、すぐにはわからなかったので買い求めて調べてみた。まず仕組みは、

(a) 本体は、頭と胴にあたる二つの中空のガラス玉を、首にあたる一本のガラス管でつないだ構造である。体内には一部液体が密封されていて、外部との液体や空気の出入りは全くない。頭とくちばしの外側はフェルトでおおわれており、くちばしに水がつくとフェルトに水がしみこむ様になっている。くちばしの内部に隙間はない。ガラス管は、頭とは直接つながっているが、胴体には底近くまで深く差し込まれている。ガラス管の中間にある金具の腕を支柱の穴にかけると、支点を中心にして前後に回転できる。実際にかけてみたら全身が少し前かがみになるところ（**初期位置**、と呼ぶ）で静止した（図II-a）。このとき液面は胴体の中程にあり、ガラス管内でも同じ高さであった。

(b) 鳥を動かすには、くちばしの部分に水をたっぷりしみこませてから手を離して静かに初期位置に置く。しばらくすると胴体内の液体がガラス管内をゆっくり上昇して鳥は前に傾き始めた。

鳥はその後次のような運動をした。

(c) 傾きがしだいに増して、やがてくちばしがコップの水面に達した（図II-b）。さらに傾きが増し、胴体内の液面がガラス管の下端より下がると、胴体内の気体の一部がガラス管の中に入り込み、管にそって登りはじめた（図II-c）。その結果、ガラス管の中に上昇していた液体が胴体内に落ちこみ、ガラス管に上っていった気体と入れ替わった。同時に鳥は水から離れ、逆に動きだして、初期位置を通り越すところまで達してから、しばらく前後に小さく振動した後、初期位置より少し前傾した位置でほぼ停止した。この後は、(c)のはじめに戻って、同じ運動をくり返した。この反復運動を**定常水飲み運動**と呼ぶ。ただし、「水飲み動作」は、鳥が実際に水を飲むわけではなく、コップの水にくちばしが入って、フェルトが濡れるだけである。

(d) 繰り返しの途中でコップを取り去っても、フェルトが濡れている間は反復運動を続けるが、しだいに周期が長くなってゆき、フェルトが乾くと初期位置で止まった。

これだけでは、まだ動く理由がわからないので次のようないろいろな実験をした。

(e) 気温とコップの水温を測ると、各々20°Cと19°Cであった。コップの水温を下げても、反復運動は続きその周期もあまり変わらなかった。しかし、水温を上げていくとくちばしが水中にある時間が長くなり、ある温度以上になると反復ののちくちばしを水に入れた状態で止まってしまった。

(f) 胴体を手の平で包むと、ガラス管内の液面はすぐに上昇して、たちまち頭にまで達した。この際も、また定常水飲み運動の際も、液体の体積にはほとんど変化は見られなかった。

(g) 水温と気温がほぼ同じ状態で、コップまで含めた装置全体をすっぽりおおうような気密の良い透明な箱をかぶせて観察した。時間がたつと、反復時間、とくに水中にくちばしを入れている時間がだんだん長くなって、何回かの水飲み動作の後、くちばしを水に入れたままもしくは初期位置より少し前傾した姿勢のまま完全に止まってしまった。その後おおいを静かに取り去ると、すぐに定常水飲み運動に戻った。

ここまでの観察と実験で、Aさんは水飲み鳥の作動機構を理解できたという。

(1) あなたは定常水飲み運動の作動機構をどう理解するか？

(2) 上の(d)～(g)は、あなたの結論に対してどういう根拠を与えたか、あるいは、あなたの結論からこれらの観察結果をどう説明できるか？

(3) Aさんは、(g)の状況でさらにある量を測って自分の結論を裏付けた。あなたならどういう実験をするか？((g)の状況に限らず、裏付けとなればどんな実験でも良い）その実験から、なにを期待しなにを実証しようと考えるか？

図 I

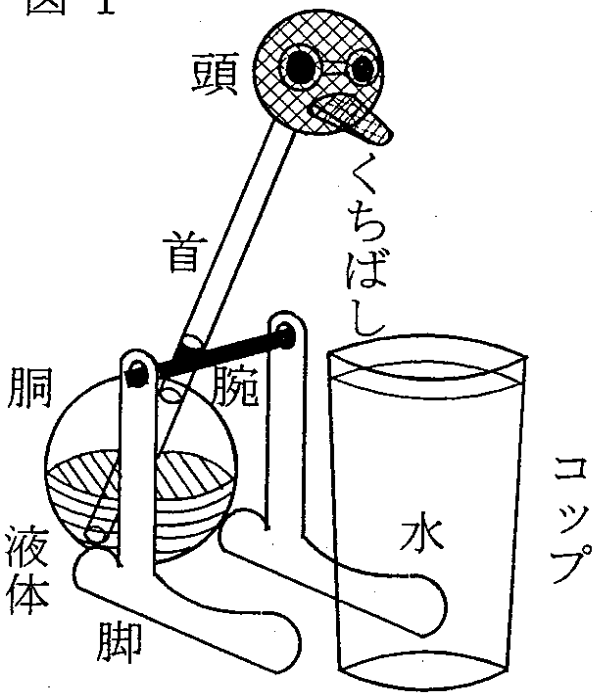


図 II-a

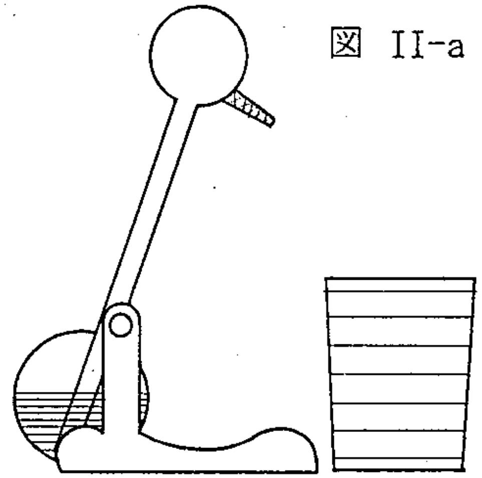


図 II-b

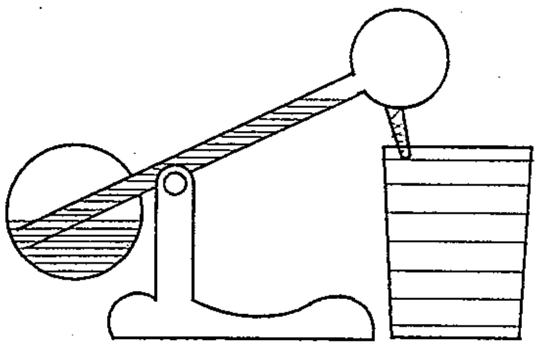


図 II-c