

平成23年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成22年8月23日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

質量 m の粒子に対する三次元のシュレーディンガー方程式

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V}\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

について、以下の設問に答えよ。この問題では、自然単位系を用いて $\hbar = 1$ とし、積分領域は三次元空間の全領域とする。

1. 状態 $|\psi\rangle$ および演算子 \hat{O} について、それらの座標表示と運動量表示の間に、次の関係が成り立つことを示せ。ただし、 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ を用いてよい。

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p} | \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \\ \langle \mathbf{p} | \hat{O} | \mathbf{p}' \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'} \langle \mathbf{x} | \hat{O} | \mathbf{x}' \rangle\end{aligned}$$

座標表示でのポテンシャル \hat{V} が、ある実関数 $g(\mathbf{x})$ を用いて、 $\langle \mathbf{x} | \hat{V} | \mathbf{x}' \rangle = -\frac{\lambda}{2m} g(\mathbf{x})g(\mathbf{x}')$ ($\lambda > 0$) と表されるとき、 \hat{V} は分離型ポテンシャルと呼ばれる。以下では、分離型ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式を、運動量表示で解くことを考える。

2. 運動量表示でのシュレーディンガー方程式

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \langle \mathbf{p} | \psi \rangle + \int d^3p' \langle \mathbf{p} | \hat{V} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \psi \rangle = E \langle \mathbf{p} | \psi \rangle$$

においても、ポテンシャルが運動量の関数 $h(\mathbf{p})$ を用いて分離型

$$\langle \mathbf{p} | \hat{V} | \mathbf{p}' \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\lambda}{2m} h(\mathbf{p})h(-\mathbf{p}')$$

となることを示せ。

3. $E = -\frac{\nu^2}{2m}$ の束縛状態が存在するとき、運動量表示での束縛状態の波動関数が

$$\langle \mathbf{p} | \psi \rangle = C \frac{h(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^2 + \nu^2} \quad (C \text{ は定数})$$

となることを示せ。

4. 関数 $g(\mathbf{x})$ が次の式で与えられるとする。

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\exp(-\mu|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (\mu > 0)$$

このとき、設問2の $h(\mathbf{p})$ は

$$h(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \mu^2}$$

となることを計算の詳細も記して示せ。

5. 設問4で与えられた $h(\mathbf{p})$ の場合に、 $|\nu|$ を λ と μ を用いて表し、束縛状態が存在するために λ が満たすべき条件を求めよ。必要なら、次の公式を用いてもよい。

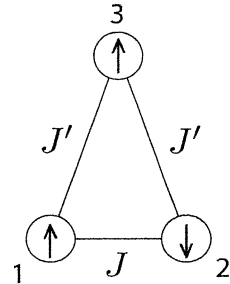
$$\int d^3p \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + \nu^2)(\mathbf{p}^2 + \mu^2)^2} = \frac{\pi^2}{|\mu|(|\mu| + |\nu|)^2}$$

6. 設問4で与えられた $h(\mathbf{p})$ の場合に、座標表示での束縛状態の波動関数 $\langle \mathbf{x} | \psi \rangle$ を求めよ。ただし、規格化はしなくてもよい。また、その概略を図示せよ。

第2問

温度 T の熱浴中にあるスピン系に、外部から z 方向に磁場 $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ がかけられている。このスピン系は大きさが S の3個の量子スピン $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ を3角形の3つの頂点に配置したもの（図参照）で構成されている。この系のハミルトニアン \mathcal{H} は、 μ をスピンの磁気モーメントとして、次のように与えられるとする。

$$\mathcal{H} = -JS_1 \cdot S_2 - J'S_2 \cdot S_3 - J'S_3 \cdot S_1 - \mu H \cdot (S_1 + S_2 + S_3)$$



まず、 $J = J' = 0$ の場合について、以下の設問に答えよ。

- この系の分配関数 Z を求めよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とし、 $\beta = 1/(k_B T)$ という記法を用いてもよい。

- z 方向の磁化 M を求めよ。解答は

$$B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} \coth\left(\frac{2S+1}{2S}x\right) - \frac{1}{2S} \coth\left(\frac{1}{2S}x\right)$$

で定義されるブリュアン関数 $B_S(x)$ を用いて表せ。また、 $\chi \equiv \lim_{H \rightarrow 0} (M/H)$ で定義される帯磁率 χ を求めよ。なお、 $\coth(y) = (e^y + e^{-y})/(e^y - e^{-y})$ であり、また、 x が小さい時、

$$B_S(x) \approx \frac{S+1}{3S}x$$

であることに注意せよ。

- 全系の比熱 C_v を求めよ。解答は $B'_S(x) (\equiv \frac{dB_S(x)}{dx})$ を用いて表せ。さらに、高温極限 ($k_B T \gg \mu H$) での C_v を求めよ。

次に、 $S = 1/2$, かつ、 $J \neq 0, J' = 0$ の場合について、以下の設問に答えよ。

- まず、 $H = 0$ の場合に、全系のエネルギー固有値とその縮重度を求めよ。さらに、それを参考にして $H \neq 0$ の場合の分配関数 Z を求めよ。
- J の正負に注意しながら、 $k_B T \ll |J|$ における z 方向の磁化 M を求めよ。解答はブリュアン関数 ($B_{1/2}, B_1$ など) を用いて表せ。

最後に、 $S = 1/2$, かつ、 $J = J' \neq 0$ の場合について、次の設問に答えよ。

- まず、 $H = 0$ の場合に、全系のエネルギー固有値とその縮重度を求めよ。さらに、それを参考にして、 $H \neq 0$ の場合の $k_B T \ll |J|$ における z 方向の磁化 M を求めよ。解答は J の正負に注意して、ブリュアン関数を用いて表せ。

第3問

時間に依存しない電磁場中で、電荷 $q (> 0)$ と質量 m をもつ粒子の運動を考える。電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} の下で荷電粒子はローレンツ力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を受ける。以下では、磁束密度 \mathbf{B} の向きは常に z 軸と平行とする。また、粒子の速度の大きさ $|\mathbf{v}|$ は光速 c に比べて十分小さく、相対論的効果は考えなくてよい。さらに、荷電粒子の運動に伴う電磁波の放出は無視する。

まず、電場が存在せず、一様な磁束密度、 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, ($B > 0$) だけがある場合を考える。

1. このとき、粒子の運動エネルギーは変化しない。その物理的理由を簡潔に述べよ。
2. 時刻 $t = 0$ において、この粒子を位置 $\mathbf{x}_0 = (a, 0, 0)$ から初速度 $\mathbf{v}_0 = (0, v_0, 0)$ で放出したところ、原点を中心とする等速円運動を行った。この粒子の運動（位置と速度）、および a と v_0 の関係を求めよ。

次に、一様な磁束密度に加えて、一様な電場、 $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, ($E > 0$) をかけた場合を考える。

3. 設問2と同じ初期条件で粒子を放出したときの運動（位置と速度）を運動方程式を解いて求めよ。このとき x, y 方向の運動に関しては、運動方程式を $u \equiv v_x + iv_y$ (v_x, v_y は速度の x, y 成分) についての微分方程式に書き換えると簡単になる。さらに、得られた運動を設問2の場合と比較して、その特徴を述べ、運動の概略を図示せよ。

今度は、電場が存在せず、磁束密度が、 $\mathbf{B} = (0, 0, B(x))$, ($B(x) > 0$) のように x 軸方向に非一様な場合を考える。ただし、非一様性は非常に小さく、磁束密度は原点付近で $\mathbf{B}(x) \approx \mathbf{B}(0) + xB'(0)\hat{z}$ と近似できるとする。ここで、 \hat{z} は z 軸方向の単位ベクトルを表し、 $B'(0) = \left. \frac{dB(x)}{dx} \right|_{x=0}$ である。

4. 設問2と同じ初期条件で粒子を放出したとき、荷電粒子が受けるローレンツ力は近似的に

$$\mathbf{F} \approx q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(0) + q\mathbf{v} \times (xB'(0)\hat{z})$$

と書ける。この右辺第2項が非一様性の効果を表し、それを $\mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ とおく。この項が荷電粒子の運動に及ぼす影響は、 $\mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ に非一様性が無い場合の原点を中心とする円運動解を代入し、円運動の1周期での平均 $\langle \mathbf{f} \rangle$ を計算することで評価できる。 $\langle \mathbf{f} \rangle$ を求めよ。

5. 一様電場中での荷電粒子の運動を参考にして、磁束密度の非一様性が荷電粒子の運動に与える影響について述べよ。

第4問

実験室系で静止している ${}^{27}_{13}\text{Al}$ のターゲットに、 ${}^{14}_7\text{N}$ のビームを照射して起こる核反応 ${}^{14}_7\text{N} + {}^{27}_{13}\text{Al} \rightarrow {}^{41}\text{Ca}^* \rightarrow {}^{33}\text{S}^* + {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ を考える。ここで、右肩の*は原子核の励起状態を表す。以下の設問に答えよ。ただし、質量数 A の原子核の半径と質量をそれぞれ $1.2 \times A^{1/3} \text{ fm}$, $1.0 \times 10^3 \times A \text{ MeV}/c^2$ としてよい。ここで、 c は光速を表し、 $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ である。また、必要に応じて、 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx 1.44 \text{ MeV fm}$, $\ln 2 \approx 0.693$, $14^{1/3} \approx 2.41$, を用いてよい。

- ${}^{14}_7\text{N}$ がクーロンポテンシャルに逆らって ${}^{27}_{13}\text{Al}$ に接触した時に核反応が起き、 ${}^{41}\text{Ca}^*$ が生成されるとする。この核反応を起こすために必要な ${}^{14}_7\text{N}$ の実験室系での最小運動エネルギー [MeV] を有効数字2ケタで答えよ。
- 70 MeV の運動エネルギーを持つ ${}^{14}_7\text{N}$ が入射した時に、生成される ${}^{41}\text{Ca}^*$ の速度を βc とし、 β の値を有効数字2ケタで答えよ。

核反応で生成された ${}^{33}\text{S}^*$ は、その静止系で 1.0 MeV のガンマ線を放出して基底状態 ${}^{33}\text{S}$ に崩壊する。このガンマ線を、図1で示されているように、ビーム入射方向から 60度の角度におかれたガンマ線検出器で観測する。ただし、検出器とターゲットは十分離れているとし、 ${}^{14}_7\text{N}$ の実験室系での運動エネルギーは 70 MeV とする。

- ${}^{33}\text{S}^*$ の運動方向と速度の大きさが ${}^{41}\text{Ca}^*$ と同じであるとして、観測されるガンマ線のエネルギーは、1.0 MeV からどれだけずれるか、有効数字2ケタで答えよ。ここで、実験室系での4元運動量 $(E/c, \mathbf{p})$ と、実験室系の z 軸方向に速度 $v = \beta c$ で運動している慣性系から見た4元運動量 $(E'/c, \mathbf{p}')$ は、ローレンツ変換

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

で関係づけられる。ただし、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。

設問3と同じ実験条件のもとで、図2に示すように、ターゲットの右側にストッパー (${}^{33}\text{S}^*$ は完全に止まるが、ガンマ線は透過する物質) を置いた。ただし、ターゲットやストッパーの厚みは無視できるとする。

- ターゲットで ${}^{33}\text{S}^*$ が N_0 個生成されるとする。 ${}^{33}\text{S}^*$ がターゲットからストッパーに到達するまでの時間を t , ${}^{33}\text{S}^*$ の平均寿命を τ として、 ${}^{33}\text{S}^*$ がストッパーに到達するまでに崩壊する数 N を N_0, t, τ を用いて表せ。
- ターゲットとストッパーの間隔を $12 \mu\text{m}$ に設定した時、観測されたガンマ線のエネルギースペクトルに2つのピークが現れた。さらに、2つのピークのカウント数が同数であった。このとき、 ${}^{33}\text{S}^*$ の半減期は何ピコ秒か。有効数字2ケタで答えよ。ただし、1ピコ秒 = 10^{-12} 秒である。

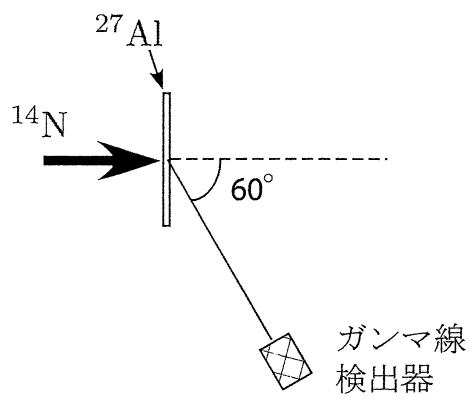


図 1

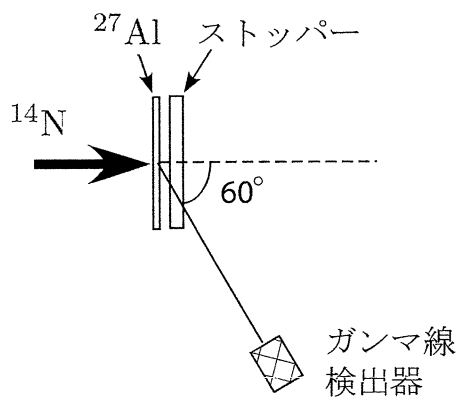


図 2

第5問 (配布のグラフ用シールを解答用紙に張り付けること。)

図1は、真空中に置かれた金属に光を照射して、金属表面から電子が放出される光電効果の実験装置の概略図である。接地された金属に振動数 ν の光を照射し、それに向き合う電極の電位(V)を変えて、電流(I)を測定することができる。以下にあげる(1)-(3)の実験結果は、放出された電子の運動エネルギーが $E_{\text{kin}}=A\nu - B$ ($E_{\text{kin}} > 0$, A および B は正の定数)であることを示し、光量子仮説を支持している。

- (1) 電位 V が負で、 $|V|$ が十分に大きいとき、電流は流れないが、 $V > V_t$ になると電流が流れる。また、 V_t は金属の種類によって異なる。
- (2) V_t は、照射する光の振動数には依存するが、振動数を固定すると光の強度には依存しない。
- (3) $V > V_t$ では、光を照射すると電流は瞬時に流れ、電位 V を高くしても電流の大きさは変わらない。

以下の設問に答えよ。

1. 金属に振動数 ν_1 ($> B/A$)の光を照射したとき、上の(1)-(3)から期待される電流と電圧の関係を図示せよ。つぎに、 $\nu_2 > \nu_1$ を満たす振動数 ν_2 の光を照射したときの電流と電圧の関係を図示せよ。ただし、単位時間当たりの光子数は等しいものとする。
2. 金属中でエネルギー E ($E \leq E_F$)を持つ電子を表面から取り出すために必要な光の最低振動数 ν_0 を求めよ。 E_F はフェルミ準位である。
3. 下の表は得られた実験結果である。配布のグラフ用シールを用い、しきい値(V_t)と光の振動数(ν)の関係を図示し、 A [J s]と B [J]の値を求めよ。(グラフ用シールは解答用紙に張り付けること。) $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ を用いてよい。

ν [10^{14} Hz]	5.49	6.83	7.41	8.22	9.58	11.9
V_t [V]	-0.40	-0.98	-1.13	-1.55	-2.13	-3.17

4. もし光を古典的電磁波と考えた場合、光電効果によって生じる電流は、光の振動数および光の強度に対してどのような依存性を示すか述べよ。

上で述べた光電効果により、真空中に放出された電子を検出してそのエネルギーと放出角度を解析すれば、金属の価電子帯構造やフェルミ面の形などを知ることができる。そのため、光電効果は金属の電子状態を研究するために利用されている。

5. 金属表面から距離 λ 以内にある電子は、光の照射により真空中に放出される。ここで、 λ は金属中を運動する電子の平均自由行程と呼ばれ、図2のように、金属中で光を吸収したあとの電子の運動エネルギーに依存する。この図に基づいて、X線を用いた光電効果が、金属内部の電子状態の解析に利用されている理由について述べよ。

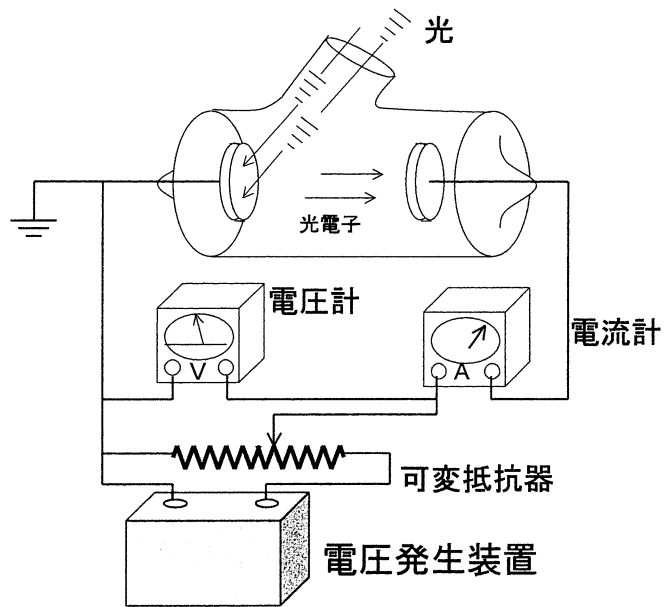


図 1:

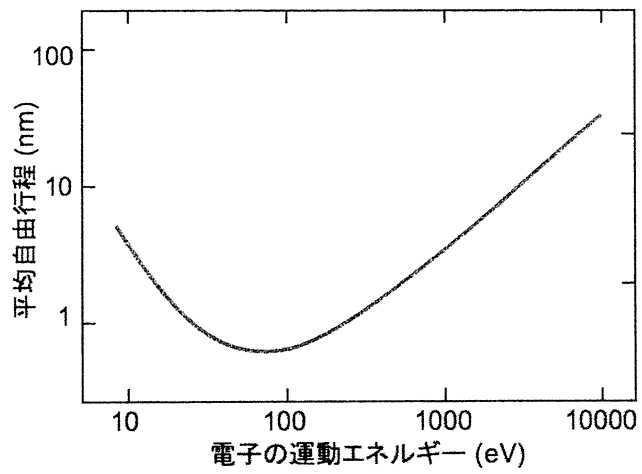


図 2:

第6問

水素原子の Balmer α 線（主量子数 $n = 3$ から $n = 2$ への遷移に伴い発生する光で、 H_α 線とも呼ばれる）の発光強度およびその揺動を計測することを考える。以下の設問に答えよ。有効数字は2ケタまで求めよ。必要に応じて、電荷素量 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K, プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s, $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19}$ J を用いてよい。

1. H_α 線に対応する光子のエネルギー [eV] および波長 [nm] を求めよ。この光は何色か？

H_α 線を検出するのにフォトダイオードを用いる。フォトダイオードは半導体の p-n 接合を利用した光検出素子で、光子が入射すると電子-正孔対が生成され、電流が流れる。

2. H_α 線光子が1個入射したときに80%の確率で電子-正孔ペアが生成されるとする。このとき、 $1 \mu\text{A}$ の電流を得るには毎秒何個の光子を集めなければならないか。
3. フォトダイオードの電流-電圧特性を図1(a)の回路で測定した結果、光が当たっていない場合は図1(b)のような特性を示した。図2のようにフォトダイオードの両端を負荷抵抗 R_L でつなぎ、光を当てたとき、流れる電流は正か負か、理由を付けて答えよ（電流の正負は図1に準じる）。フォトダイオードに光が当たると電流-電圧特性曲線はどう変わるかを解答用紙に描き、その理由を述べよ。また光の強さを直接測定するためには、負荷抵抗 R_L をどのように選ぶのがよいか、解答用紙に描いた図に負荷線を記入して条件を説明せよ。ただし、説明には図1(b)に示したジャンクション電圧 V_j を使うこと。

フォトダイオードに流れる電流は微弱なので、オペアンプを使って増幅し、電圧信号に変換する。

4. 設問3の条件がみたされれば、フォトダイオードは受光した光の強さに比例する電流を流す電流源とみなしてよい。この場合に、図3の回路を用いて、フォトダイオードの出力電流 I_i を、インピーダンス Z_f により電圧に変換することを考える。オペアンプの入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロであり、オペアンプのゲインを G とする。このとき、オペアンプの出力電圧 V_o を I_i , G , および Z_f を用いて表せ。また、 $G \rightarrow \infty$ の極限ではどうなるかを説明せよ。

次に、 H_α 線の強度揺らぎを $0 \sim 100 \text{ kHz}$ の周波数範囲で測定することを考える。

5. 興味対象外の非常に高い周波数成分を落とすため、 Z_f を電流-電圧変換抵抗 R_f とコンデンサ C_f からなる並列回路で構成する。 $I_i = 1 \mu\text{A}$ の電流を $V_o = 100 \text{ mV}$ の電圧に変換するため必要な R_f [Ω] の値を求めよ。また、 100 kHz 以下の信号を忠実に増幅し、それ以上の周波数の信号を減衰させるために必要な C_f [F] の値を求めよ。

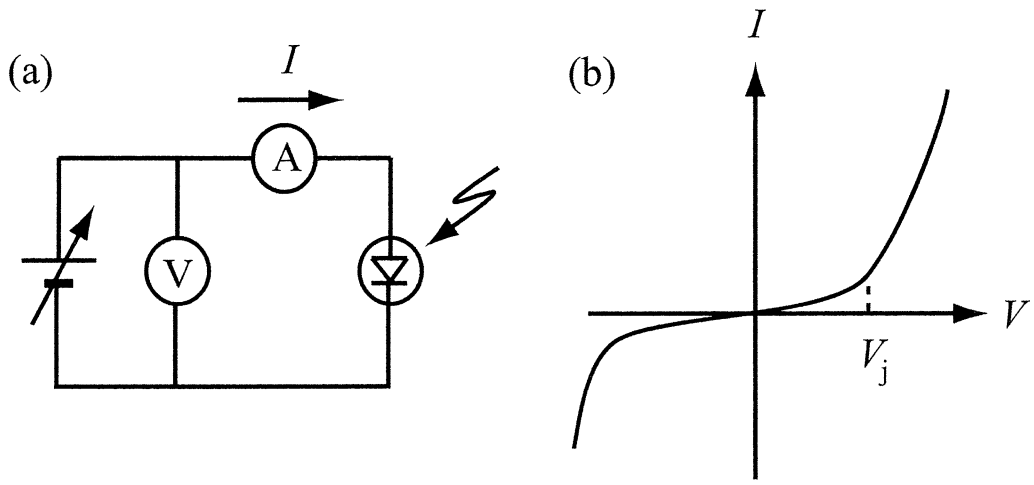


图 1

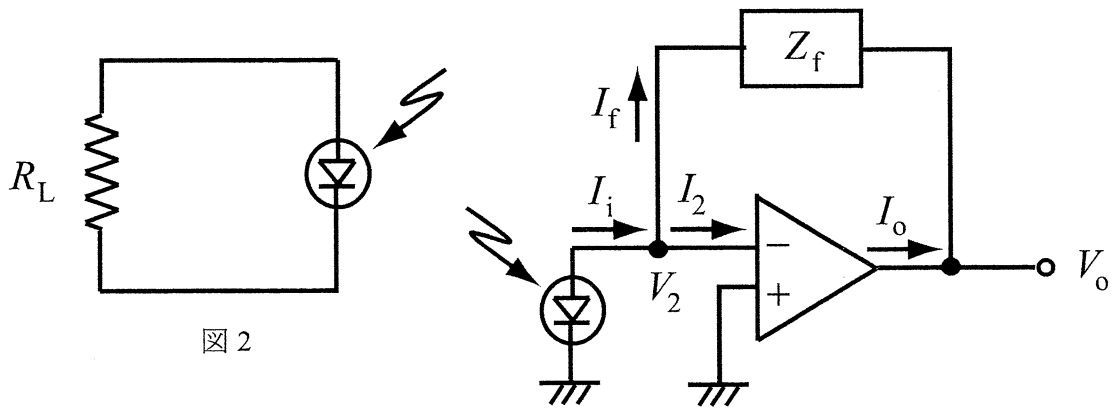


图 2

图 3