

平成26年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成25年8月26日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

外部電磁場中での質量 m , 電荷 q の荷電粒子の量子力学的運動を考える。そのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi$$

で与えられる。ここでは、粒子のスピン自由度は考えない。 ϕ , \mathbf{A} は、それぞれ電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを表し、ここでは時間によらないとする。量子化条件は、座標と運動量の正準交換関係、 $[x, p_x] = xp_x - p_x x = i\hbar$, $[y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar$, で与えられる。ここで、 $\hbar = h/2\pi$ で、 h はプランク定数を表す。以下の問いに答えよ。

まず、原点に置かれた $-q$ の電荷の作る静電ポテンシャルの中の運動を考える。その座標表示のハミルトニアンは、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる。ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ は原点からの距離、 ϵ_0 は真空の誘電率を表す。

- この基底状態は球対称性を持つ s 波状態となり、その波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は動径座標 r のみの関数となる。長さの次元を持つ定数 r_0 と、エネルギーの次元を持つ定数 E_0 を適当に選んで、 $r = r_0\rho$, $E = -E_0\varepsilon$ とおくと、基底状態のシュレーディンガー方程式は、無次元変数 ρ と無次元エネルギー ε を使って、

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{2}{\rho} \right] \psi = \varepsilon \psi \quad (1)$$

と書くことができる。このとき、 r_0 と E_0 を、 m , q , ϵ_0 , \hbar を用いて表せ。必要であれば、任意の r のみの関数 $f(r)$ にたいし、 $\nabla^2 f(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) f(r)$ となることを用いよ。

- (1) 式の節なし解 $\psi(\mathbf{r}) = ce^{-\rho} = ce^{-r/r_0}$ は基底状態の波動関数を与える。ここで、定数 c は波動関数の規格化因子を表す。基底状態のエネルギー E と粒子の動径座標の拡がりの大きさ $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ を、それぞれ、 E_0 と r_0 を用いて表せ。ここで、 $\langle r^2 \rangle$ は r^2 の期待値を表す。

次に、 z 軸の負の方向を向いた強さ B の一様な静磁場中での荷電粒子の運動を考える。このとき、ポテンシャルを $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (By/2, -Bx/2, 0)$, $\phi(\mathbf{r}) = 0$, ととると、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{qBy}{2} \right)^2 + \left(p_y + \frac{qBx}{2} \right)^2 + p_z^2 \right] \quad (2)$$

で与えられる。

- $p_1 = p_x - \frac{qBy}{2}$, $p_2 = p_y + \frac{qBx}{2}$, p_z の間の交換関係を求めよ。
- 適当な定数 k を選んで、新しい正準座標 (X, P) を $X = kp_2$ と $P = p_1$ ととることにより、 (x, y) 方向の運動が1次元の調和振動子と等価になることを示し、その固有振動数 ω を求めよ。また、古典的描像では ω が何を表すか述べよ。
- $P' = p_x + \frac{qBy}{2}$ は正準座標 (X, P) のそれぞれと可換になることを示せ。また、 P' と正準共役な関係にあるエルミート演算子 X' を、正準座標 (X, P) と可換になるように、 x と p_y の線形結合で構成せよ。

6. ハミルトニアン(2)は正準座標 (X, P) と p_x で書かれており, もう一組の正準座標 (X', P') には依存しない。今, (X, P) 座標にのみ注目したとき, X を対角化する表示で基底状態の波動関数はどう表されるか。さらに変数 X' を考慮に入れる場合, それが特定の実数値 $X' = a$ を持つときには, この基底状態の波動関数を元の座標 x で書き表すことができる。そのとき, a はどういう意味を持つか述べよ。

第2問

xy 平面上の2次元空間内に閉じ込められたフェルミ粒子系のグランドカノニカル分布を考える。空間は、一辺の長さが L の正方形として周期境界条件を採用する。以下の設問ではスピンの自由度は考えない。

まず、質量 m の自由フェルミ粒子系を考える。

1. フェルミ粒子の持つ波数を $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ とし、1粒子の固有エネルギー $\epsilon_{\mathbf{k}}$ を求めよ。さらに、この固有エネルギーの低い方から順に N_0 番目までフェルミ粒子を詰めたとする。このときの固有エネルギーの最大の値を求めよ。ただし N_0 は十分大きな数とせよ。

2. このフェルミ粒子系の大分配関数

$$\Xi(T, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\mathbf{k}}\}} e^{-\beta(E_N - \mu N)} \quad (1)$$

を \mathbf{k} の取り得る値についての積の形に変形せよ。ここで $\beta = 1/(k_B T)$, k_B はボルツマン定数, T は絶対温度, μ は化学ポテンシャルである。また $n_{\mathbf{k}}$ は波数 \mathbf{k} を持つ粒子の数を表し, $\{n_{\mathbf{k}}\}$ に関する和は, $N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ を満たすすべての可能な $\{n_{\mathbf{k}}\}$ の組み合わせについての和である。また, E_N は $\{n_{\mathbf{k}}\}$ に依存する全エネルギーで, $E_N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}$ で与えられる。

3. グランドカノニカル分布において、全粒子数の期待値 \bar{N} に関して

$$\bar{N} = \sum_{\mathbf{k}} f(\epsilon_{\mathbf{k}}) \quad (2)$$

が成り立つことを示せ。ここで $f(\epsilon_{\mathbf{k}})$ はフェルミ分布関数である。さらに, L が十分大きいとして, (2) 式の \mathbf{k} に関する和をエネルギー積分の形に書き直して積分を実行せよ。

4. フェルミ分布関数の概形を用いて、低温の極限における比熱が温度 T に比例する理由を定性的に説明せよ。

次に、1つの波数 \mathbf{k} に対して、エネルギーが負の状態とエネルギーが正の状態があるようなフェルミ粒子系を考える (図1)。エネルギーが負の分散関係と正の分散関係は、それぞれ

$$\epsilon_{1\mathbf{k}} = -\Delta - \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2M}, \quad \epsilon_{2\mathbf{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} \quad (3)$$

であるとする。絶対零度では、負のエネルギー状態に粒子が完全に詰まっていて、正のエネルギー状態には粒子が存在しないとする。

5. $0 < k_B T \ll \Delta$ の温度領域において、粒子の分布がどのようなようになるかを定性的に説明せよ。
6. 負のエネルギー状態のフェルミ粒子の粒子数の期待値を $\bar{N}_1(T)$ と書く。ただし、2次元の波数 \mathbf{k} の絶対値には上限 K があるとし、絶対零度では

$$\bar{N}_1(0) = \sum_{|\mathbf{k}| < K} 1$$

と書けるとする。設問5と同じ温度領域において、 μ を温度の関数として求めよ。ただし, K は十分大きいとしてよい。

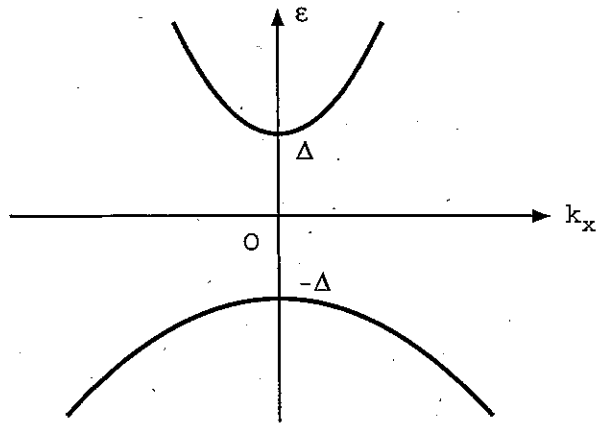


図 1: $k_y = 0$ での分散関係

第3問

媒質中の Maxwell 方程式は以下のように表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

ここで ρ および \mathbf{j} は真電荷密度および真電流密度であり、原子や分子に束縛された電荷の寄与や変位電流は含まない。以下では線形応答する一様で等方的な媒質中の電磁場を考える。その場合、スカラー一定数 ϵ (誘電率), μ (透磁率), および σ (電気伝導度) を用いて, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ と書ける。誘電体中では $\epsilon = \epsilon_d$ (実数), $\sigma = 0$ とし, 導体中では $\epsilon = \epsilon_m$ (実数), $\sigma = \sigma_m$ (実数) とする。透磁率はいずれの媒質中でも μ_0 (実数) とする。必要であれば, 任意のベクトル \mathbf{V} についての公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ を使ってよい。

1. 全領域が誘電体で満たされている場合を考える。この媒質中を $+z$ 方向に伝搬する平面電磁波の電場は, 複素表示を用いて $\mathbf{E}_0 \exp(ikz - i\omega t)$ と表される。(ただし物理量はその実部で表される。) この形の有限振幅の波が存在するための条件を ω と k の間の関係式として示せ。またこの波の位相速度を求めよ。
2. 全領域が導体で満たされている場合を考える。この媒質中で波の伝搬を表す \mathbf{E} に関する方程式を \mathbf{B} を使わずに表せ。

以下では誘電体が $z < 0$ の領域を, 導体が $z > 0$ の領域を満たしている場合を考える。 $z = -\infty$ から入射してきた, 電場が x 方向に偏光した平面電磁波の電場を $\mathbf{E}_{i0} \exp(ikz - i\omega t)$, 境界面 $z = 0$ で反射された波の電場を $\mathbf{E}_{r0} \exp(-ikz - i\omega t)$, $z > 0$ における電場を $\mathbf{E}_{m0} \exp(ik_m z - i\omega t)$ と表す。

3. (3) 式および (4) 式より, 境界面における接続条件を導け。
4. 設問 2 で求めた方程式より k_m の値を具体的に求め, $z > 0$ における電場の解 (エネルギー保存則を満たすもの) を書き表せ。ただし導体内では (4) 式の右辺第 2 項 (変位電流) は, 第 1 項 (真電流) に比べ十分小さいとし, 無視してよい。
5. 反射電力の入射電力に対する割合 (電力反射率) を, 微小量 $\sqrt{\omega \epsilon_d / \sigma_m}$ の 1 次までの近似で求めよ。
6. 導体内における xy 面上単位面積当たりの抵抗損失電力 $\langle \int_0^\infty \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dz \rangle$ (ただし $\langle \rangle$ は時間平均を表す) を $\sqrt{\omega \epsilon_d / \sigma_m}$ の 1 次までの近似で求め, その xy 面上単位面積当たりの入射電力に対する割合を表せ。

第4問

X線に関する以下の設問に答えよ。数値計算に必要な次の物理定数を用いてよい。また、数値には単位を忘れずに記すこと。

プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s, 光速度 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s, 電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

数十 keV に加速された電子線を金属に照射すると X 線が発生する。

1. 図1は、モリブデン (原子番号 $Z = 42$) から発生した X 線のスペクトル (波長と強度の関係) である。広い波長域にわたって分布している「連続 X 線」と、特定の波長で鋭いピークを持つ「特性 X 線」がある。このような X 線のスペクトルを測定する実験法をひとつ挙げ、その原理も含めて簡潔に説明せよ。必要なら模式図を用いてよい。
2. X 線の波長 λ とエネルギー E との関係, および λ と周波数 ν との関係を示せ。また, 図1の特性 X 線の一つである K_α 線 ($\lambda = 0.72 \text{ \AA}$) のエネルギー E と周波数 ν の数値を計算せよ。 E は eV 単位で求めよ。ただし, $1 \text{ \AA} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$ である。

モーゼリーは、いろいろな元素から放射される特性 X 線の波長を測定し、周波数 ν を求めた。その周波数の平方根 $\sqrt{\nu}$ と元素の原子番号 Z との関係をグラフにまとめると図2のようにほぼ直線の関係になった。この関係を利用すると特性 X 線の周波数 (またはエネルギー) から元素を同定できる。 $\sqrt{\nu}$ と Z が線型関係になることを次の設問に従って導け。

3. 原子番号 Z の原子の内殻電子のひとつを, $+Ze$ の電荷を持つ原子核の周りを半径 r で円運動している古典粒子と考えて, その電子の全エネルギーを書き表せ。ただし, 真空の誘電率を ϵ_0 とする。
4. この電子の円運動に, ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件やド・ブロイの関係式を適用して, 全エネルギーが整数 (主量子数) を使って表せる離散的な値になることを示せ。ただし, 電子の質量を m とする。
5. この原子から放射される特性 X 線は, 設問4で求めたエネルギー準位のうちの2つの間の遷移で発生するとして, その X 線の周波数 ν を書き表し, $\sqrt{\nu}$ と Z の関係を示せ。

図2の実験データを解析してみる。

6. 図2の K_α 線は, 主量子数が1と2のエネルギー準位間の遷移によって発生する特性 X 線である。 K_α 線の直線の傾きから, エネルギーの単位である1リュドベルグ ($1 \text{ Ry} = me^4/8\epsilon_0^2 h^2$) の数値を eV 単位で求めよ。ただし, 設問5で求めた $\sqrt{\nu}$ と Z の関係は近似であり, 実験データの直線は, 厳密には原点 ($\sqrt{\nu} = 0, Z = 0$) を通らないことに注意せよ。
7. 図2の L_α 線は, 主量子数が2と3のエネルギー準位間の遷移によって発生する特性 X 線である。 L_α 線のデータの直線で, $\sqrt{\nu} = 0$ のときの Z の値, つまり y 切片の値は K_α 線の直線の y 切片と比べて大きく, 約5.4である。このように y 切片がゼロにならないことは何を意味するのか定性的に述べよ。

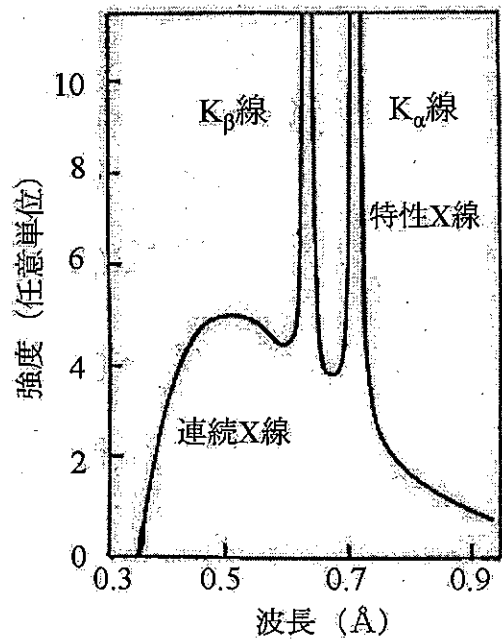


図1:

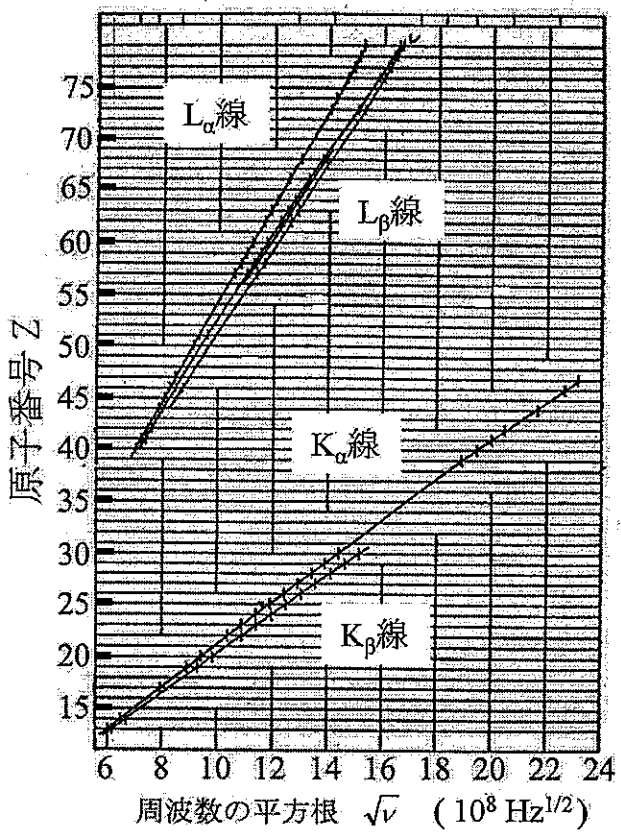


図2:

第5問

化学反応におけるギブスの自由エネルギーに関する次の設問に答えよ。

- 物質の出入りのない系でのギブスの自由エネルギー G は、 $G = U + pV - TS$ で与えられる。ここで、 U , p , V , T , S はそれぞれ、内部エネルギー、圧力、体積、絶対温度、エントロピーである。 G の微分 dG が、 $dG = -SdT + Vdp$ となることを示せ。
- 物質の出入りのあるなしにかかわらず、化学反応が起きている系において dG は、

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dn_i \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 μ_i と n_i はそれぞれ、物質成分 i の1モル当たりの化学ポテンシャルとモル数である。物質の出入りのない希薄溶液中で、分子Aと分子Bから分子ABが作られる反応が定温定圧下で平衡に達した。このとき、A, B, ABの化学ポテンシャル μ_A , μ_B , μ_{AB} の間に成り立つ関係を導け。

- 設問2における反応の平衡定数 K は、標準反応自由エネルギー ΔG^0 を用いて、

$$K = \frac{m_{AB}}{m_A m_B} = \exp\left(\frac{-\Delta G^0}{RT}\right) \quad (2)$$

と表される。ここで m_A [mol/kg] 等は各分子の重量モル濃度、 R は気体定数である。各分子の化学ポテンシャルは $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln m_i$ (i は A, B, AB) で表される。ここで、 μ_i^0 は、 $m_i = 1$ [mol/kg] における化学ポテンシャルであり、標準化学ポテンシャルと呼ばれている。 ΔG^0 を標準化学ポテンシャルを用いて表せ。

タンパク質は図1に模式的に示したように、重合反応をおこなう。重合体の左端は固定され、右端は物体から重合体1本あたり力 f を受けている。タンパク質単量体1分子が重合体の右端に結合することで、物体を右に距離 d 移動させる。一方、図1の物体の左右方向の位置を正確に測定したところ、位置は図2のように時間的に揺らいでおり、単量体1分子の重合に伴う2.7 nmの変位が起こった。

- 定温定圧で図1のような反応が多数独立に起こっている系を考える。 $f = 0$ のとき、単量体 (P_1) が重合体 (P_{n-1}) に結合して距離 d だけ伸びた重合体 (P_n) が生成する反応を考えよう。このとき、反応の平衡定数 $K_n(0)$ は、(2) 式を利用して、

$$K_n(0) = \frac{m_n}{m_{n-1} m_1} = \exp\left(\frac{-\Delta G_n^0}{RT}\right) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 m_n [mol/kg] 等は P_n 等の重量モル濃度、 ΔG_n^0 は重合反応の標準反応自由エネルギーである。力 f が各重合体にはたらくと標準化学ポテンシャルは次のように変化する。

$$\mu_n^0(f) - \mu_{n-1}^0(f) - \mu_1^0(f) = \mu_n^0(0) - \mu_{n-1}^0(0) - \mu_1^0(0) + N_A f d \quad (4)$$

ここで N_A はアボガドロ数である。力 f がはたらいたときの平衡定数 $K_n(f)$ を f を用いて表せ。

5. 設問4で $m_n = m_{n-1}$ と近似できるときを考える。力がはたらかないときの単量体濃度は $2.0 \times 10^{-7} \text{ mol/kg}$ で、力 f がはたらくとき単量体濃度は $2.0 \times 10^{-5} \text{ mol/kg}$ である。力 f の値を求めよ。また、単量体1分子が重合する際、 $1.0 \times 10^{-19} \text{ J}$ のエネルギーが利用されていた。この時重合に伴う仕事効率の値を求めよ。ただし、温度は 300 K である。 $N_A = 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $R = 8.3 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$, $\log_e 10 = 2.3$ を用いてよい。
6. 図2の位置の揺らぎは図1の反応にとって重要である。揺らぎの原因と、揺らぎがどうして重要であるかを説明せよ。

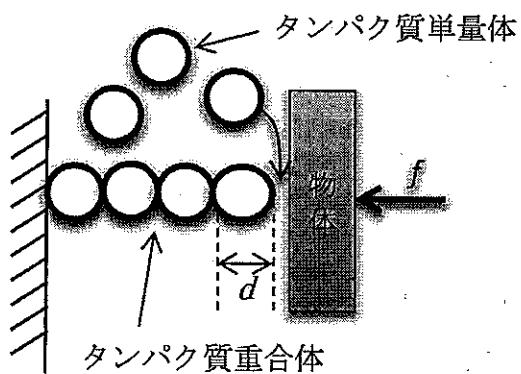


図1:

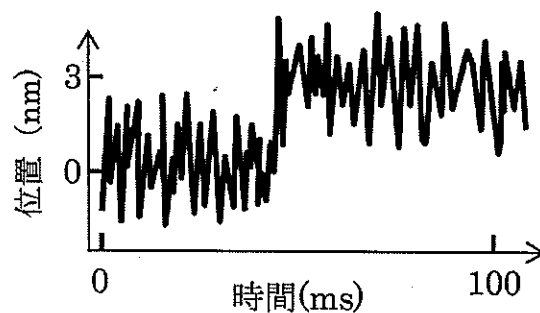


図2:

第6問

昨年ヒッグス粒子が ATLAS 実験と CMS 実験で発見された。ヒッグス粒子が2個の光子に崩壊するモードについて考えてみよう。このモードを発見するために、2個の大きなエネルギーを持った光子が観測された事象を選んで、2個の光子の4元運動量を用いて不変質量を計算する。以下では自然単位系 ($c = 1, \hbar = 1$) を用いてもよい。ただし、 c は真空中の光速で、 \hbar はプランク定数を 2π で割った数である。

1. エネルギー E のヒッグス粒子がエネルギー E_1 と E_2 、運動量 \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 の2個の光子に崩壊した ($E = E_1 + E_2$)。このとき、ヒッグス粒子の質量の2乗 m^2 を $E_1, E_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ であらわせ。この結果を用いて、2個の光子の運動量のなす角を ψ とすると、ヒッグス粒子の質量 m は $mc^2 = 2\sqrt{E_1 E_2} \sin(\psi/2)$ とあらわせることを示せ。

図1において、大きなバックグラウンドの上に乗っている小さな山が、ATLAS 実験が実際に得たヒッグス粒子のシグナルである。このバックグラウンド分布は、ヒッグス粒子の崩壊以外の事象において2個の大きなエネルギーの光子が見つかったときに、ヒッグス粒子の2光子崩壊の場合と同じように計算した不変質量の分布である。

2. ヒッグス粒子のシグナルの山の幅は設問1で計算した不変質量の測定誤差に相当する。何が質量測定の測定誤差の原因になるかを考えて、それらを挙げよ。
3. 設問2の測定誤差を小さくできれば、ヒッグス粒子のシグナルがより有意 (significant) になることを説明せよ。
4. ヒッグス粒子の質量 m を $125 \text{ GeV}/c^2$ 、そのエネルギー E を 250 GeV とするとき、設問1の結果を用いて、ヒッグス粒子の崩壊で生じた2個の光子の運動量のなす角 ψ の最大値と最小値を求めよ。
5. ヒッグス粒子の静止系で3次元直交座標系を定義する。この系において原点にある質量 m のヒッグス粒子が崩壊したときに生じた2個の光子のうち片方の光子の運動量の大きさは $mc/2$ である。この光子の運動量方向が zx 面内にあるとして、放射された極角 (z -軸からの角度) を θ とする。この光子の4元運動量の4成分を求めよ。また、このヒッグス粒子が z 方向に速さ v で走る系において、この光子のエネルギーを求めよ。ただし、 $\beta = v/c$ 、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とおく。
6. ヒッグス粒子がその静止系で2個の光子に崩壊するとき、光子の角分布は等方的である。すなわち、設問5で定義した θ に関して、 $\cos\theta$ は -1 と 1 の間で一様に分布する。これを用い、質量が $125 \text{ GeV}/c^2$ 、エネルギーが 250 GeV のヒッグス粒子の崩壊で生ずる2個の光子のうち片方の光子のエネルギー分布を図示せよ。ただし縦軸のスケールは任意でよい。

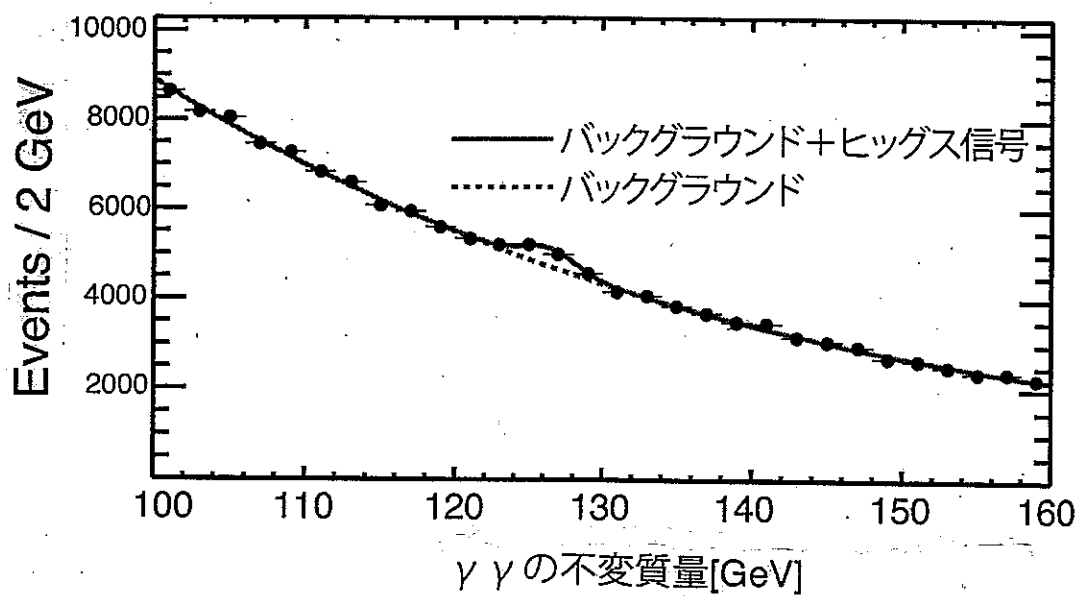


図 1: