

平成25年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成24年8月27日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

ハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \quad (1)$$

で与えられる角振動数 ω の一次元調和振動子の量子力学を考える。ただし、調和振動子の質点の質量を m 、位置演算子を \hat{x} 、運動量演算子を \hat{p} で表し、プランク定数 2π を \hbar とする。次の各設問に答えよ。

1. 以下の文章を読んで、 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ク}}$ に当てはまる数式を書け。

一次元調和振動子の消滅演算子 \hat{a} は、

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (2)$$

で与えられる。このとき、 \hat{a} に共役な生成演算子 \hat{a}^\dagger は、 \hat{x} と \hat{p} を用いて $\hat{a}^\dagger = \boxed{\text{ア}}$ と表される。この \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係は $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \boxed{\text{イ}}$ をみたす。 \hat{x} と \hat{p} を \hat{a} と \hat{a}^\dagger を用いて表すと、 $\hat{x} = \boxed{\text{ウ}}$ と $\hat{p} = \boxed{\text{エ}}$ となるので、ハミルトニアン \mathcal{H} も \hat{x} と \hat{p} ではなく \hat{a} と \hat{a}^\dagger を用いて $\mathcal{H} = \boxed{\text{オ}}$ と書くことができる。これより、 \mathcal{H} の規格化された基底状態 $|\phi_0\rangle$ に対応する \mathcal{H} のエネルギー固有値 E_0 は、 $E_0 = \boxed{\text{カ}}$ で与えられる。 n 番目の規格化された励起状態を $|\phi_n\rangle$ 、対応するエネルギー固有値を E_n と表すと、 $|\phi_n\rangle$ と $|\phi_{n+1}\rangle$ は $|\phi_{n+1}\rangle = \boxed{\text{キ}} \hat{a}^\dagger |\phi_n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で与えられる関係式を満たし、 $E_n = \boxed{\text{ク}}$ となる。ただし、 $\boxed{\text{キ}}$ は正の実数となるように位相を選ぶものとする。

2. ハミルトニアン \mathcal{H} による一次元調和振動子の時間発展を考える。時刻 $t = 0$ における規格化された初期状態 $|\psi(0)\rangle$ が、設問1で定義された $|\phi_n\rangle$ と複素係数 $c_n(0)$ を用いて

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) |\phi_n\rangle \quad (3)$$

で与えられているとき、時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) |\phi_n\rangle$ の複素係数 $c_n(t)$ を $c_n(0)$ を用いて表せ。

3. 設問1で定義された $|\phi_n\rangle$ における \hat{x} の分散を $(\Delta x)^2 = \langle \phi_n | \hat{x}^2 | \phi_n \rangle - (\langle \phi_n | \hat{x} | \phi_n \rangle)^2$ 、 \hat{p} の分散を $(\Delta p)^2 = \langle \phi_n | \hat{p}^2 | \phi_n \rangle - (\langle \phi_n | \hat{p} | \phi_n \rangle)^2$ とする。このとき、これらの平方根の積 $\Delta x \cdot \Delta p$ を求めよ。
4. 一次元調和振動子が、ある複素数パラメータ $\alpha = r e^{i\theta}$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて表される次の重ね合わせ状態

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle = e^{-\frac{r^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r e^{i\theta})^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle \quad (4)$$

で与えられているとき、 $|\alpha\rangle$ が \hat{a} の固有状態であることを確かめよ。また、 $|\alpha\rangle$ における \hat{x} の期待値 $\langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle$ と \hat{p} の期待値 $\langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle$ を求め、 r と θ の関数として表せ。

5. 一次元調和振動子の初期状態が、式(4)で定義された重ね合わせ状態 $|\alpha\rangle$ と実数 $r_0 \geq 0$ を用いて $|\psi(0)\rangle = |\alpha = r_0\rangle$ で与えられているとき、 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。また、 \hat{x} と \hat{p} を $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$ と $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}$ に従って変数変換し、 $|\psi(t)\rangle$ における \hat{X} の期待値 $\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle$ と \hat{P} の期待値 $\langle\psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle$ の時間発展の特徴を述べよ。

第2問

十分大きな体積 V の三次元領域に閉じ込められている理想ボース気体について以下の設問に答えよ。ただし、設問1から6においてパラメータ t を含んだ積分

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^t}{e^x - 1}$$

が $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ のとき収束することを用いてもよい。

1. 温度 T , 化学ポテンシャル μ のグランドカノニカル分布における大分配関数の表式

$$\Theta = \prod_i \Theta_i, \quad \Theta_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_i - \mu)n_i], \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (1)$$

を出発点にして、一粒子状態 i にある粒子数の統計力学的平均値が

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} \quad (2)$$

で与えられることを示せ。ここで ϵ_i は i の一粒子エネルギー、 n_i は i にある粒子数を表す。 k_B はボルツマン定数を表すものとする。

スピン0の理想ボース気体を考える。体積 V が十分大きいので単位体積当たりの一粒子状態密度 $D(\epsilon)$ は、

$$D(\epsilon) = \begin{cases} A\epsilon^{\frac{1}{2}}, & \epsilon \geq 0 \\ 0, & \epsilon < 0 \end{cases}, \quad A = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2\hbar^3} \quad (3)$$

とおくことができる。ここで m はボース粒子の質量を表し、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものを表す。粒子数密度 (全粒子数 N を体積 V で割ったもの) を ρ で表し、 ρ' を

$$\rho' \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) = A \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{\frac{1}{2}} f(\epsilon) \quad (4)$$

と定義する。ある温度 T_c 以上では $\rho' = \rho$ が成り立つが、 T_c より低温ではボース・アインシュタイン凝縮が起きるため $\rho' < \rho$ となる。また T_c 以下の温度では化学ポテンシャル μ はゼロとなる。

2. ボース・アインシュタイン凝縮とはどのような現象か。40字程度で説明せよ。
3. T_c において平均粒子間距離 $\ell = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$ と熱的ドブロイ波長 $\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}\right)^{\frac{1}{2}}$ が同程度になることを示せ (ヒント: $T = T_c$ のとき $\rho' = \rho$ かつ $\mu = 0$ である)。
4. $T < T_c$ における単位体積あたりの定積熱容量 $C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{N,V}$ の温度依存性を $C_V \propto T^\gamma$ と表したとき、 γ の値を求めよ。ここで E は単位体積あたりの内部エネルギーで

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) = A \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{\frac{3}{2}} f(\epsilon) \quad (5)$$

を表す。

5. $T < T_c$ における単位体積当たりのエントロピー S の温度依存性を $S \propto T^\nu$ と表したとき、 ν を求めよ。

一様磁場の下でのスピン1の理想ボース気体を考える。物理量 $\bar{\rho}$ を

$$\bar{\rho} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \tilde{D}(\epsilon) f(\epsilon), \quad \tilde{D}(\epsilon) \equiv D(\epsilon - \epsilon_z) + D(\epsilon) + D(\epsilon + \epsilon_z) \quad (6)$$

と定義すると、ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 \tilde{T}_c 以上では $\bar{\rho}$ は粒子数密度 ρ に等しいが、 \tilde{T}_c より低温では $\bar{\rho} < \rho$ となる。ここで $\epsilon_z (> 0)$ はゼーマンエネルギーを表す。

6. ゼーマンエネルギー ϵ_z を $\epsilon_{z,1} (\ll k_B T)$ から $\epsilon_{z,2} (\gg k_B T)$ まで断熱的に変化させたときの終状態の温度は始状態の温度より高いか低いかを、理由と共に述べよ。この断熱過程において常にボース・アインシュタイン凝縮は起きているものとしてよい。

第3問

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, スカラーポテンシャル $\varphi(\mathbf{r}, t)$ の電磁場内における粒子の運動を考える。この粒子の質量を m , 電荷を q , 位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすると, そのラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 + q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{A} - q\varphi \quad (1)$$

で与えられる。

1. 式(1)を用いて, この粒子に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書き下せ。
2. 設問1で得られたオイラー・ラグランジュ方程式が, ローレンツ力のもとでの運動方程式:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E} + q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

に帰着することを示し, 電場 \mathbf{E} および磁場 \mathbf{B} をベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル φ を用いてそれぞれ書き下せ。

3. 任意の関数 $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r}, t)$ に対するゲージ変換:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \Lambda, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (3)$$

のもとで, 電場および磁場が不変であることを示せ。また, この変換のもとで得られる式(1)のラグランジアンを L' としたとき, L' が L と同じオイラー・ラグランジュ方程式を与える理由を簡単に述べよ。

以下の設問では, 具体的にベクトルポテンシャルが

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right) \quad (B \text{ は定数}), \quad (4)$$

スカラーポテンシャルが

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) \quad (\alpha \text{ は定数}), \quad (5)$$

で与えられるものとし, 特に $q > 0, 0 < \alpha < \frac{qB^2}{4m}$ の場合を考える。

4. 式(4)と式(5)に対応する磁場 \mathbf{B} および電場 \mathbf{E} を求めよ。
5. 粒子の運動方程式の z 成分を書き下し, 粒子が z 方向にどのような運動をするかを簡単に説明せよ。
6. 粒子の運動方程式の x 成分と y 成分を書き下せ。この粒子の運動を xy 平面上に射影したとき, どのような運動であるかを簡単に説明せよ。

第4問

物理学実験において雑音の起源とその性質を理解することは重要である。ここでは抵抗の両端に発生する熱雑音について考えよう。図1のように面積 A 、長さ l の導体からなる抵抗の両端を短絡した回路を考える。導体の端面は抵抗の無視できる金属で覆われており、さらに導体と金属間の接触抵抗は無視できるものとする。また、導体内での電流は、質量 m 、電荷 q 、数密度 n の粒子で運ばれるとする。各粒子には外場はかかっていないが、不規則に変動する力（揺動力）を受けて運動しているとする。電流に寄与する粒子の運動として1次元方向のみを考え、各粒子は運動方程式

$$m \frac{dv_i}{dt} + \eta v_i = f_i \quad (1)$$

に従うとする。ここで、 v_i は i 番目の粒子の速度、 f_i は i 番目の粒子が受ける揺動力、 η は正の定数である。各粒子の運動は互いに独立としてよい。回路に流れる全電流 I は、全粒子数 $N = nAl$ を用いて $I = \frac{q}{l} \sum_{i=1}^N v_i$ と書ける。

1. 揺動力 f_i の起源として、各粒子に有効電場 $E_i = f_i/q$ が加わっているものとする。この有効電場によってある時刻に導体の両端に発生する起電力は、粒子全体の平均として

$$V = \frac{l}{N} \sum_{i=1}^N E_i \text{ で与えられる。このとき、電流 } I \text{ が従う運動方程式は}$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V \quad (2)$$

という形に書ける。 L 及び R をそれぞれ m 、 q 、 n 、 A 、 l 等を用いて表せ。

2. 式(2)で与えられる等価回路を考え、複素交流インピーダンス $Z(\omega)$ を角振動数 ω と L 、 R を用いて書き下せ。

式(2)の右辺の起電力 V は時々刻々不規則に変動する物理量である。このような時間変動する物理量 $X(t)$ の測定を十分多くの回数繰り返し行うことを考え、その平均値を $\langle X(t) \rangle$ と表す。十分長い時間での時間平均 $\overline{X(t)}$ は $\langle X(t) \rangle$ と等しいと仮定する。

3. 温度 T における粒子に対するエネルギー等分配則 $\frac{1}{2} m \langle v_i^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ を用いて、 $\frac{l}{2} \langle I^2(t) \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ が成り立つことを示せ。但し、 $i \neq j$ の場合 $\langle v_i v_j \rangle = 0$ としてよい。 k_B はボルツマン定数である。
4. 電流 I の自己相関関数を $\phi_I(\tau) = \langle I(t) I(t+\tau) \rangle$ により定義する。式(2)から $\phi_I(\tau)$ に対する方程式を導き、 $\phi_I(\tau)$ を求めよ。またそのフーリエ変換、 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_I(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ を求めよ。但し、 $\langle I(t) V(t+\tau) \rangle = \langle I(t) \rangle \cdot \langle V(t+\tau) \rangle = 0$ としてよい。

任意の関数 $a(t)$ に対して、区間 $[-T/2, T/2]$ で切り出した関数

$$a_T(t) = \begin{cases} a(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad (3)$$

を定義し、そのフーリエスペクトル $\hat{a}_T(\omega)$ とパワースペクトル $S_a(\omega)$ をそれぞれ

$$\hat{a}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4)$$

$$S_a(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |\hat{a}_T(\omega)|^2 \quad (5)$$

により定義する。

5. 熱雑音により抵抗の両端に発生する電圧の揺らぎのパワースペクトル $S_V(\omega)$ を R と T を用いて表せ。尚、自己相関関数とパワースペクトルの間には

$$S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_a(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (6)$$

の関係が成り立つことを用いてよい。また、電圧と電流のフーリエスペクトルの比、 $\hat{Z}_T(\omega) = \hat{V}_T(\omega)/\hat{I}_T(\omega)$ は設問2で求めた複素交流インピーダンスと等しいとしてよい。

温度 T で熱平衡にある抵抗 R から発生する微弱な熱雑音を低周波数領域で測定するために、オペアンプを用いて図2に示す非反転増幅回路を作成した。図2ではオペアンプの電源は省略してある。抵抗 R 以外の素子から発生する雑音、及び増幅器の周波数依存性は無視できるものとする。

6. 抵抗 R の両端に発生する熱雑音電圧を V とする。点 A とアース間の電圧 V_A を R , R_1 , R_2 , V を用いて表わせ。尚、オペアンプは非反転入力端子 (+) と反転入力端子 (-) 間の電位差がゼロになるように動作すると考えてよい。
7. 出力電圧 V_{out} のパワースペクトルを、抵抗 R の熱雑音のパワースペクトル $S_V(\omega)$ と R_1 , R_2 , R_f , C_f を用いて表せ。

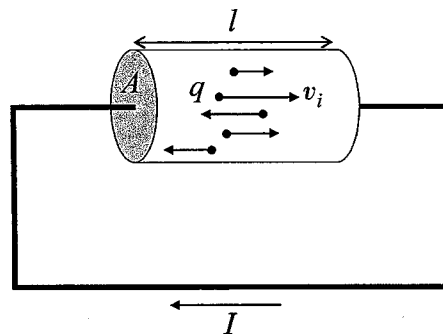


図 1:

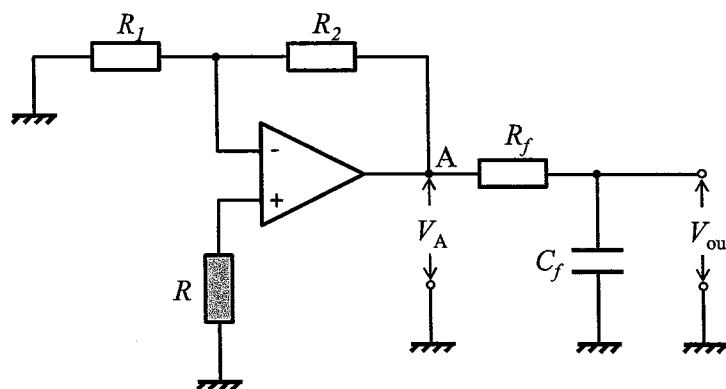


図 2:

第5問

加速した陽子を原子核標的に衝突させ、別種の原子核を生成する図1のような反応を考える。ここで、陽子の静止質量を $m[\text{MeV}/c^2]$ 、運動量の大きさを $p[\text{MeV}/c]$ 、標的原子核の静止質量を $M[\text{MeV}/c^2]$ とし、標的原子核は実験室系で静止しているとする。衝突で生成された原子核 A の運動量の大きさ、静止質量、散乱角を、それぞれ、 $p_A[\text{MeV}/c]$ 、 $M_A[\text{MeV}/c^2]$ 、 θ_A とする。以下の設問に答えよ。

1. 同時に生成された原子核 B の運動量の大きさ、静止質量、散乱角を、それぞれ、 $p_B[\text{MeV}/c]$ 、 $M_B[\text{MeV}/c^2]$ 、 θ_B とする。衝突の前後での相対論的エネルギーの保存則、および運動量保存則を書き下せ。 p_B を p 、 p_A 、 θ_A を用いて表せ。 M_B を p 、 p_A 、 m 、 M 、 M_A 、 θ_A を用いて表せ。
2. 加速した陽子の運動量の大きさが $500 \text{ MeV}/c$ のとき、運動エネルギーおよび、光速 c を単位とした速さを有効数字 1 桁で相対論的に求めよ。但し、 $m = 1 \text{ GeV}/c^2$ とせよ。

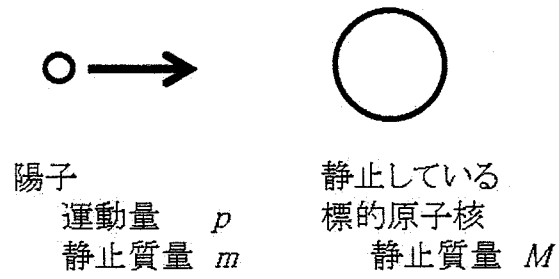
次に、原子核 A を図 2 に示す装置に入射した。

装置に入射された原子核は、曲率半径 $R[\text{m}]$ の円弧に沿った十分細いパイプ中を抜け、平行平板電極間（電極間の電圧 $V[\text{V}]$ 、距離 $d[\text{m}]$ ）を直進し、検出器で検出される。図の四角で囲われた部分には紙面に対して裏から表の向きに磁束密度 $B[\text{T}]$ の一様な磁場が存在し、 B と V を適正に調整することで、特定の条件を持つ原子核のみが装置内のパイプや電極に当たることなく検出器で検出される。以降の設問では、非相対論的近似を用いて良い。また、荷電粒子の運動に伴う電磁波の放出は無視して良い。

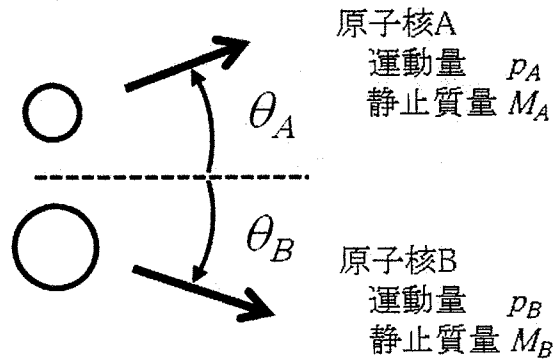
3. 電荷 $q[\text{C}]$ ($q > 0$)、速度 $v[\text{m}/\text{s}]$ を持つ原子核は、電磁場中でローレンツ力を受ける。装置で検出された原子核の比電荷 $\frac{q}{M_A}$ を R 、 B 、 V 、 d で表せ。
4. この装置で運動量 $p_A = 200 \text{ MeV}/c$ の He 原子核 ($M_A = 4 \text{ GeV}/c^2$) を検出したとき、 $R = 1 \text{ m}$ 、 $d = 1 \text{ cm}$ として、 B と V を有効数字 1 桁で求めよ。ここで、光速 c は、 $3 \times 10^8 \text{ m}/\text{s}$ とせよ。

図 2 のように粒子の通過方向に直列に検出器 1 と検出器 2 を設置した。検出器 1 は十分薄く粒子が通過し、検出器 2 は十分厚く粒子が止まるようにしてある。検出器 1 と検出器 2 は、シリコン半導体を用いた放射線検出器である。この検出器では、放射線の物質中でのエネルギー損失により生成される正孔-電子ペアが電気信号として取り出される。

5. 運動量が既知の原子核に対して、このように厚さが違う検出器を組み合わせることで、原子核の種類を同定することが可能となる。その理由を簡潔に述べよ。また、図 2 の実験装置において、検出器での測定によって新たに得られる粒子の情報は何か、簡潔に述べよ。
6. 設問 4 の He 原子核に対する検出器 1 で測定されたエネルギー損失は、 0.6 MeV であった。検出器 1 における、この He 原子核と同じ速さを持つ陽子のエネルギー損失を有効数字 1 桁で概算せよ。概算の根拠も入射原子核と物質の相互作用を考えて簡潔に述べよ。
7. 設問 4 の He 原子核の運動エネルギーを有効数字 1 桁で求めよ。また、検出器 2 におけるこの He 原子核のエネルギー損失の測定精度を有効数字 1 桁で求めよ。ただし、シリコン半導体検出器で正孔-電子ペアを一つ作るのに必要なエネルギーは 4 eV であるとし、測定精度は統計ゆらぎのみで決まっているものと考えよ。



衝突前



衝突後

図 1:

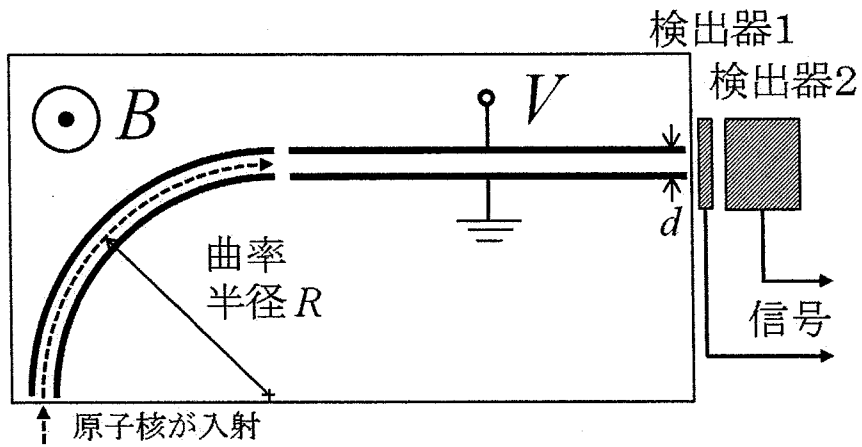


図 2:

第 6 問

固体の熱伝導について考える。熱伝導率 κ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] は熱流密度 J [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$] と温度勾配 ∇T [$\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$] の比例係数として、 $J = -\kappa \nabla T$ で定義される。以下の設問に答えよ。

真空中に置かれた銅の熱浴 (図 1(a)) 上に、熱伝導率測定系を構築したい。熱浴の温度は T_0 [K] に保たれ、それぞれ外部の電圧計と電流可変の電流源につながれた 2 つの端子対が、熱浴と電氣的に絶縁されて取り付けられている。絶縁体試料 X (直方体)、銅線につながれた小型ヒータ (抵抗 R [Ω])、銅コンスタンタン熱電対を用意した。(図 1(b)) 銅線とコンスタンタン線はともに十分に細く、試料と比べるとその熱伝導は無視できるほど小さい。また銅線の電気抵抗は無視できるほど小さい。銅コンスタンタン熱電対の二つの接点間に微小温度差 ΔT [K] が与えられると、それに比例する電圧 ΔV [V] $= \alpha \Delta T$ が生じる。温度 T_0 での α の値は既知である。

1. 図 1(a), (b) の要素を用いて、温度 T_0 における絶縁体試料 X の熱伝導率 κ を測定する装置を考案し、配線や配置がわかるようにそれを図示せよ。
2. この装置を用いて試料 X の熱伝導率 κ を測定する手順を簡潔に述べよ。試料 X の長軸に垂直な断面積 S [m^2]、熱電対の端子間距離 W [m] はあらかじめ測定してある。

絶縁体の熱伝導は結晶格子、具体的にはフォノンが担っている。簡単のために x 方向にだけ熱流が流れる仮想格子の格子熱伝導率 κ_L を考える。温度勾配 dT/dx が与えられた時、位置 $x + \Delta x$ では位置 x より $dT/dx (\Delta x)$ だけ温度が高い。したがって多くのフォノンが励起され、単位体積当たりの格子比熱を C_L とすると $C_L dT/dx (\Delta x)$ だけエネルギー密度が高くなる。これがフォノンによって低温側に運ばれ、熱流が生じる。

3. フォノンによるエネルギーの輸送はその平均自由行程 l_{ph} 以下の距離に制限される。位置 x における熱流は、 x と $x - l_{ph}$, $x + l_{ph}$ の間の領域のエネルギー密度がそれぞれ正負の向きに音速 v_L で運ばれることで生じると考える。 $\kappa_L = C_L v_L l_{ph}$ を示せ。

熱流が x , y , z 三方向に流れる場合は $\kappa_L = \frac{1}{3} C_L v_L l_{ph}$ が知られている。これを用いて図 2 に示す絶縁体試料 X の熱伝導率 $\kappa (= \kappa_L)$ の温度依存性を解釈する。図 2 のデータは設問 1 の装置の熱浴の温度 T_0 を変化させながら測定したものである。

4. 音速は温度にほとんど依存しない。図 2 のデータをもとに、低温極限における絶縁体試料 X のフォノンの平均自由行程の温度依存性を推測せよ。推測の根拠についても簡潔に記すこと。
5. 同様に室温付近のフォノンの平均自由行程の温度依存性を推測せよ。推測の根拠についても簡潔に記すこと。
6. フォノンの散乱には (I) 不純物や格子の欠陥による機構と (II) フォノン間の散乱による機構がある。低温極限、室温付近それぞれの温度領域で、支配的散乱機構が (I)(II) いずれであるか答えよ。推測の根拠についても簡潔に記すこと。

金属の熱伝導には格子に加えて電子の寄与が加わる。電子の熱伝導率 κ_e と電気伝導率 σ は密接に関係し、ローレンツ数 $L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2$ を用いて $\frac{\kappa_e}{\sigma T} = L$ が成立する。ここでボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ 、電子の電荷 $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ である。

7. $T = 300 \text{K}$ における電気抵抗率が $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ である金属の κ_e を計算せよ。この値が図 2 に示す典型的な絶縁体の熱伝導率 κ と比較して、同じ温度で十分大きいことを確認せよ。これが金属に触れると絶縁体より冷たく感じる理由である。

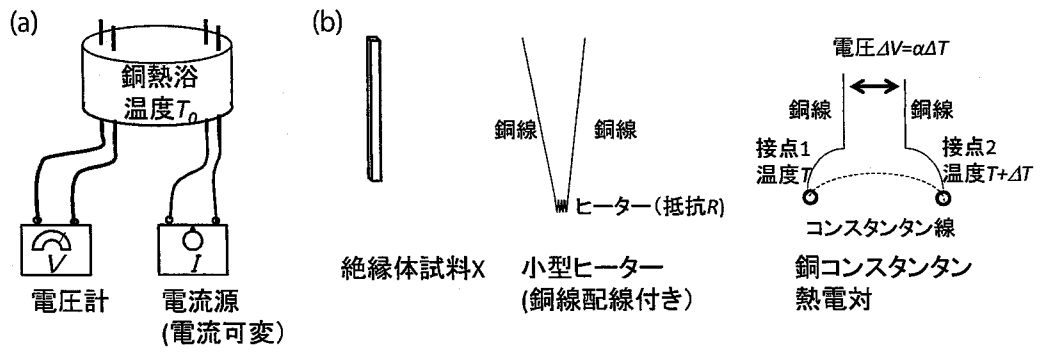


図 1:

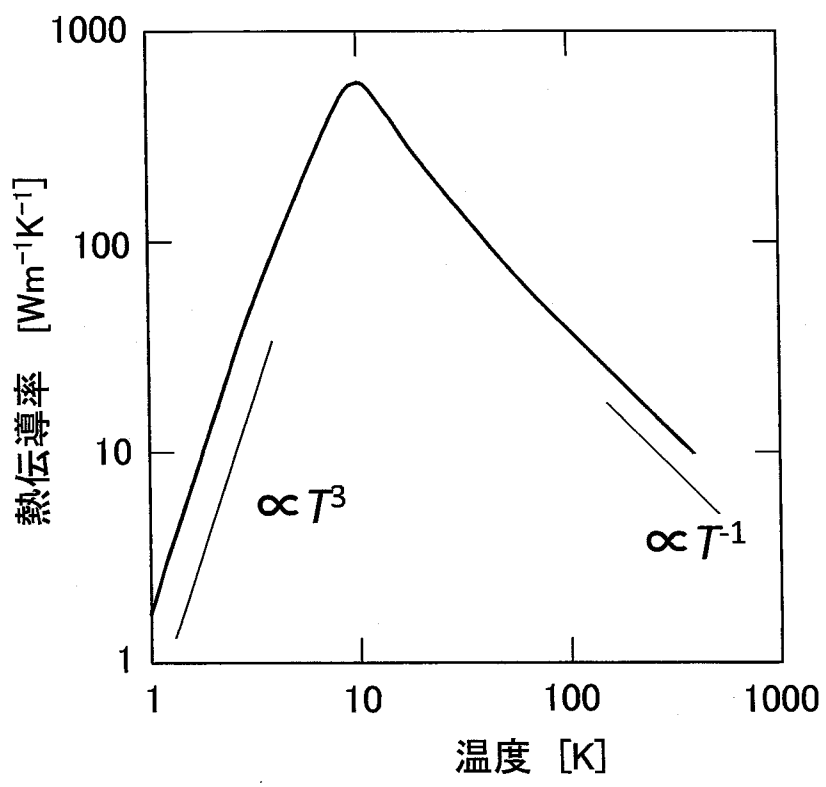


図 2:

物理問題の訂正

第6問

設問の2の2行目

(誤) 熱電対の端子間距離 W → (正) 熱電対の接点間距離 W