

平成16年度東京大学大学院理学系研究科  
物理学専攻修士課程入学試験問題

# 物 理 学

平成15年8月26日(火) 12時30分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用すること。
3. 問題は全部で9問ある。9問からから**5問を選んで**解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計5枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に**科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号**を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

### 第1問

質量  $m$ 、振動数  $\omega$  をもつ一次元調和振動子のハミルトニアン演算子  $H$  は

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{p}$  はそれぞれ位置座標演算子と運動量演算子である。この系を解析するために、ハイゼンベルグ表示を用いる。また、演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{x}(0) + i\frac{\mathbf{p}(0)}{m\omega}\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{x}(0) - i\frac{\mathbf{p}(0)}{m\omega}\right)$$

を導入する。ここで、 $\mathbf{x}(0)$  と  $\mathbf{p}(0)$  は時刻  $t=0$  での演算子である。以下の問いに答えよ。

1. 演算子  $N = a^\dagger a$  と  $a^\dagger$  との交換関係および  $N$  と  $a$  との交換関係を求めよ。
2. 演算子  $N$  の固有状態を  $|n\rangle$  とし、その固有値を  $n$  とすると、

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

が成り立つ。ここで、 $a^\dagger|n\rangle = C|n+1\rangle$  および  $a|n\rangle = D|n-1\rangle$  であることを示し、係数  $C$  と  $D$  を求めよ。ただし、係数  $C$  と  $D$  は正の数とし、状態  $|n\rangle$  は  $\langle n|n\rangle = 1$  と規格化されているとする。

3. 上の結果を用いて  $n$  がゼロ又は正の整数であることを証明せよ。

さて、ハイゼンベルグ表示では演算子  $\mathbf{x}(t)$  および演算子  $\mathbf{p}(t)$  は時刻  $t$  に依存する。それらの演算子の時間変化はハイゼンベルグ方程式で与えられる。以下の問いに答えよ。

4.  $\mathbf{x}(t)$  および  $\mathbf{p}(t)$  についてのハイゼンベルグ方程式を書け。
5. 上記の方程式を解いて  $\mathbf{x}(t)$  と  $\mathbf{p}(t)$  を求め、それらが古典解と類似の時間変動を示すことを示せ。
6. 期待値  $\langle n|\mathbf{x}(t)|n\rangle$  および  $\langle n|\mathbf{p}(t)|n\rangle$  を求めよ。
7. 期待値  $\langle \lambda|\mathbf{x}(t)|\lambda\rangle$  および  $\langle \lambda|\mathbf{p}(t)|\lambda\rangle$  が調和振動子の古典解と類似の時間変動を示すような状態  $|\lambda\rangle$  は、基底状態  $|G\rangle$  に演算子  $a$  および  $a^\dagger$  を作用して作ることができる。つまり、この状態  $|\lambda\rangle$  は  $|\lambda\rangle = F(a, a^\dagger)|G\rangle$  と書ける。関数  $F(a, a^\dagger)$  の具体例を示せ。ただし、基底状態は  $a|G\rangle = 0$  を満たすものとする。また、状態  $|\lambda\rangle$  の規格化条件は無視してよい。

## 第2問

図のように  $N$  個の単量体が連結された直線的な鎖状分子を考える。各単量体は図のように自由に変形し、長さ  $a$  の状態  $\alpha$  (エネルギー:  $+\epsilon$ ) か長さ  $b$  の状態  $\beta$  (エネルギー:  $-\epsilon$ ) のいずれかを、隣りあう単量体とは独立にとることができるとする。

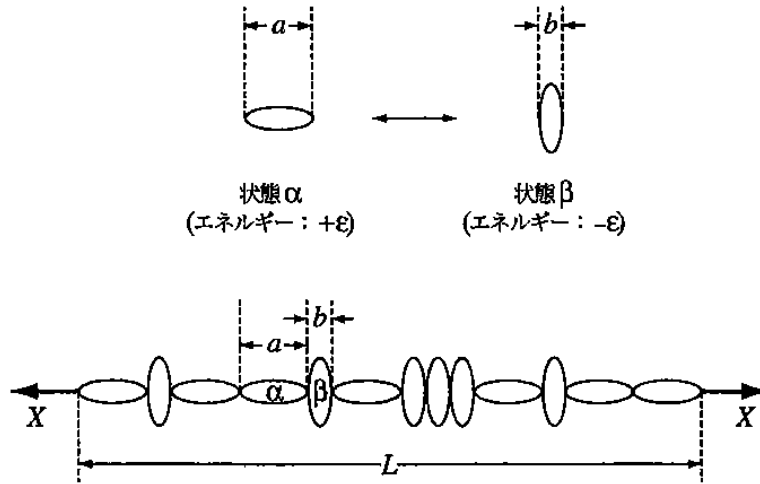


図 1:

鎖状分子が孤立した状態にあって、熱平衡に達している場合 (ミクロカノニカル分布) を考える。

1.  $N_\alpha$  個が  $\alpha$ 、 $N_\beta$  個が  $\beta$  の状態にいる場合を考える ( $N = N_\alpha + N_\beta$ )。鎖状分子の長さ  $L$  とエネルギー  $E_L$  を求めよ。また、この状態の熱力学的重率  $W(N_\alpha, N_\beta)$  を求め、鎖状分子のエントロピー  $S$  が次のようになることを示せ。

$$S = -k_B \left\{ N_\alpha \log \frac{N_\alpha}{N} + N_\beta \log \frac{N_\beta}{N} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $k_B$  はボルツマン定数である。Stirling の公式、 $\log n! = n \log n - n$  ( $n \gg 1$ ) を用いてよい。また、 $\log$  は自然対数とする。

つぎに、鎖状分子が温度  $T$  の熱浴に接していて、一定の温度状態におかれている場合 (カノニカル分布) を考える。

2. 熱浴の状態密度を  $\Omega(E_B)$  とする。鎖状分子と熱浴からなる全系のエネルギーを  $E_T$ 、状態  $l$  にある鎖状分子のエネルギーを  $E_l$  とすれば ( $E_T = E_B + E_l$ )、等重率の原理により、状態  $l$  の実現確率  $P(E_l)$  は、 $l$  が指定された場合の微視的状态の数  $\Omega(E_T - E_l)\delta E$  に比例する。

$$P(E_l) \propto \frac{\Omega(E_T - E_l)\delta E}{\Omega(E_T)\delta E} \quad (2)$$

このことから、カノニカル分布では、状態  $l$  の実現確率  $P(E_l)$  は、 $\exp(-E_l/k_B T)$  に比例することを示せ。ただし、熱浴は鎖状分子にくらべて十分大きいものとする。また、熱浴の温度が  $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$  で表せることに留意せよ。

3. 一つの単量体の分配関数  $Z_1$  を示し、さらに鎖状分子の分配関数  $Z_N$  を導け。
4. 分配関数  $Z_N$  より、Helmholtz の自由エネルギー  $F$ 、エントロピー  $S$ 、系の内部エネルギー  $E$  を求めよ。
5. 比熱  $C$  を求め、温度の関数として図示せよ。ただし縦軸を  $C/Nk_B$  とし、横軸を  $k_B T/\epsilon$  とせよ。

つぎに、鎖状分子を温度  $T$  の状態においたまま、一定の張力  $X$  で両端を引っ張り、長さ  $L$  となった場合を考える。このとき、この系では、熱力学第一法則  $TdS = dE - XdL$  が成立している。(  $N$  個の単量体からなる系を、非常に大きな  $N_T$  個からなる系の部分系と考えると、熱浴は  $N_T - N$  個からなる非常に大きな系と考えることができる。 )

6. 鎖状分子がエネルギー  $E_L$  で長さ  $L$  の状態にある確率  $p(E_L, L)$  は、熱浴を含む全系のエネルギーを  $E_T$ 、長さを  $L_T$  とすると、熱浴の状態密度  $\Omega(E_B) = \Omega(E_T - E_L, L_T - L)$  を用いて

$$p(E_L, L) \propto \frac{\Omega(E_T - E_L, L_T - L)\delta E}{\Omega(E_T, L_T)\delta E} \quad (3)$$

と書ける。 $E_T, L_T$  に比べて  $E_L, L$  が十分に微視的な量であることを利用して、

$$p(E_L, L) \propto \exp \left\{ \frac{1}{k_B T} (-E_L + XL) \right\} \quad (4)$$

であることを示せ。

7. 系の分配関数

$$Y = \sum_{N_\alpha=0}^N W(N_\alpha, N_\beta) p(E(N_\alpha, N_\beta), L(N_\alpha, N_\beta)) \quad (5)$$

について、 $N_\alpha$  に関する和を計算し、 $N, T, X, a, b, +\epsilon, -\epsilon$  を用いて表せ。

8. 分配関数より Gibbs の自由エネルギー  $G$  を求め、そこから鎖状分子の長さ  $L$  と張力  $X$  に関する関係式を求めよ。

### 第3問

電磁場中での電荷  $q$ 、静止質量  $m$  をもつ粒子の加速を考える。電場  $\vec{E}$ 、磁場  $\vec{B}$  の下で荷電粒子はローレンツ力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

を受ける。ここで、 $\vec{v}$  は粒子の速度で、磁場  $\vec{B}$  は常に  $z$  軸方向に一樣で一定、つまり、 $\vec{B} = (0, 0, B)$  とする。また、荷電粒子の運動に伴う電磁波の放出を無視する。

まず、粒子の速度は光速  $c$  に比べて十分小さく、したがって、相対論的効果を考えなくて良いとする。

1. 電場が存在せず、一樣な磁場だけがある場合、粒子を時刻  $t = 0$  に初速度  $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$  で  $\vec{x} = (0, 0, 0)$  から放出した場合にこの粒子の時刻  $t$  での速度と位置を求めよ。
2. 一樣磁場に周期的に変動する電場  $\vec{E} = (-E \sin(\Omega t), -E \cos(\Omega t), 0)$  を加え、設問 1 と同じ初期条件で荷電粒子を放出した場合、時刻  $t$  での粒子の速度を求めよ。ただし、 $E$  は定数である。
3.  $\Omega = qB/m$  のとき十分時間がたてば荷電粒子の運動エネルギーが時間とともに増大することを示せ。

次に、粒子の速度が光速に比べて無視できない（相対論的）場合を考える。このときは粒子の運動量  $\vec{p}$ 、エネルギー  $\mathcal{E}$  は相対論的表式

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

で与えられる。ここで  $v = |\vec{v}|$  である。また、相対論的な場合も式 (1) で与えられるローレンツ力  $\vec{F}$  を使って運動方程式は  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$  と書ける。

4. 設問 1 と同じく一樣な磁場だけがあり、電場がない場合、粒子の速度が相対論的のときも、運動方程式の両辺と速度  $\vec{v}$  との内積をとることによって粒子の速さ  $v$  が運動中一定であることを示せ。
5. 前問までの結果を使って運動方程式を解き、粒子の速度  $\vec{v}(t)$  を求めよ。
6. 相対論的な場合の結果を考慮して、設問 3 と同じく一樣な磁場と振動数  $\Omega = qB/m$  で変動する電場が存在する場合、粒子の運動エネルギー  $(\mathcal{E} - mc^2)$  の増加はとまる。その理由を述べよ。ただし、最初荷電粒子の速さは光速に比べて小さいとして、具体的に相対論的な運動方程式を解く必要はない。

第4問

宇宙探査機は燃料の不足を補うため、しばしばスイングバイという航法で加速を行うことがある。(例えばアポロ13号は月の重力を、火星探査機のぞみは地球の重力を使って加速した。) 中心力場の力学からこの原理について考える。

- 2次元の極座標系  $(r, \phi)$  を用いて中心力ポテンシャル  $U(r)$  中を運動する質量  $m$  の質点の Lagrangian を書き、Euler-Lagrange の方程式を用いて角運動量の保存則を導け。
- 図1のように質量  $m$  の探査機が質量  $M$  の惑星に対して距離  $b$  の漸近線  $SS'$  に沿って無限遠方から速さ  $v$  で進入し、漸近線  $TT'$  に沿って出てゆくものとする。ただし、 $M \gg m$  の関係があり、惑星は静止しているとみなしてよい。惑星の位置を原点とし、探査機の座標を  $(r, \phi)$  とするとき次式が成り立つことを示せ。

$$\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2} \tag{1}$$

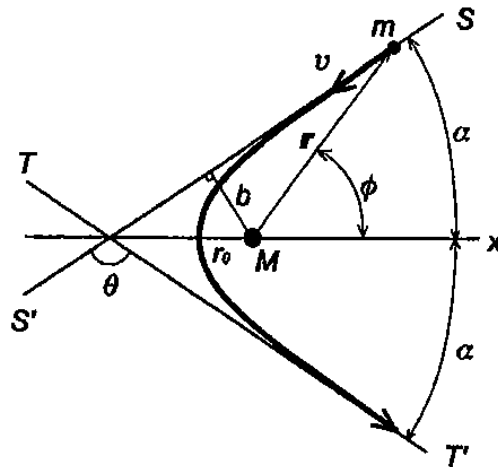


図1:

- 探査機が惑星に最も近づいた時の惑星までの距離  $r_0$  を  $v, b, M$  と重力定数  $G$  を用いて表わせ。ただし、ポテンシャル  $U(r)$  は  $U(r) = -\frac{GMm}{r}$  と表わされる。
- 探査機の  $(x, y)$  座標系における速度を  $(v_x, v_y)$  とおくと、 $v_x$  と  $\phi$  の間に次の微分方程式が成立することを示せ。ただし、式(1)を用いてよい。

$$dv_x = -\frac{GM}{vb} \cos \phi d\phi \tag{2}$$

- 入射前後における角度変化  $\theta$  が  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v^2 b}$  で表わされることを示せ。ただし、式(2)を用いてよい。

6. 図2のように惑星が速度ベクトル  $\vec{W}$  で太陽に対して運動していたところへ探査機がやってきた。探査機の太陽に対する相対速度ベクトルが入射前は  $\vec{v}$ 、出射後は  $\vec{u}$  であったとして、惑星の運動量の変化を無視せずに、入射前後における探査機のエネルギー変化、 $\frac{1}{2}m|\vec{u}|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$  を求めよ。ただし、惑星の引力圏内では、太陽からの引力は無視できるものとする。
7. 上の結果から探査機の加速が可能なことを示せ。また、増加した探査機のエネルギーはどこから来たか答えよ。

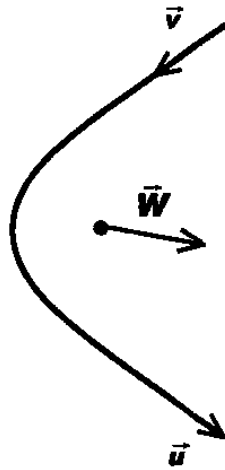


図 2:

第 5 問

図 1 に NaI シンチレーションカウンター (NaI 検出器) の原理的な構成を示す。この検出器はタリウムを混入したヨウ化ナトリウム NaI(Tl) の結晶と光電子増倍管から出来ている。光電子増倍管の陽極から出力される電流パルスは抵抗  $R=500\text{k}\Omega$  と電気容量  $C=20\text{pF}$  からなる等価回路で表される出力部回路に送られるものとする。この NaI 検出器を用いて、線源から放射されるガンマ線の検出を行う。以下の設問に答えよ。

但し、光電子増倍管の陰極に光が入射してから増幅された電子群が陽極に達するまでの飛行時間は無視できるものとし、NaI(Tl) 結晶の蛍光減衰定数  $\tau=230\text{ns}$  とする。また、NaI(Tl) 結晶の寸法は、入射ガンマ線との相互作用で生じる 2 次ガンマ線の平均自由行程よりも小さいが、2 次荷電粒子は NaI(Tl) 結晶内で完全に吸収される程度とする。

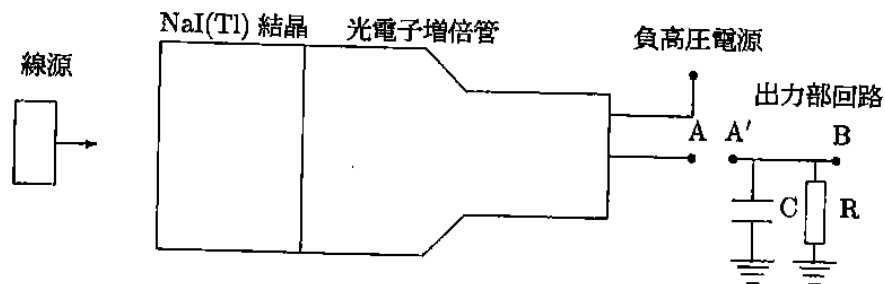


図 1: NaI 検出器の原理的な構成

1. ガンマ線が NaI(Tl) の結晶中で起こす相互作用を 3 つ上げ、各々がどのような相互作用であるかを説明せよ。
2. (a) 図 1 で、点 A は光電子増倍管の陽極に同軸ケーブルでつながっているとす。点 A の出力をオシロスコープで見ると、終端抵抗が必要であるが、その理由を述べ、接続の仕方を図示せよ。  
 (b) 電氣的に正しく終端されたオシロスコープを用いて、点 A におけるガンマ線からくる出力パルスはどのような波形に見えるかを図示せよ。また、点 A と点 A' を結線して出力部回路をつないだ場合、点 B におけるガンマ線からくるパルス波形を図示せよ。どちらの図に対しても、縦軸の電圧のスケールは任意で良いが、横軸の時間スケールが分かるように示すこと。  
 (c) 前問の点 B における波形観察の際、電氣的なノイズが高く、ガンマ線からのパルス波形が見づらかったとする。その原因が特定されていない場合、どのような工夫を試みるべきか、具体的対処を 2 つあげよ。
3. 出力部等価回路からの出力を適当な閾値によって波高弁別して計数した。線源を置かない場合、10 分間で 600 カウントだった。線源を置いた場合、2 分間で 1000 カウントだった。  
 (a) 線源から放射されるガンマ線の計数率 (カウント/分) とその標準偏差を求めよ。



- (b) 線源から放射されるガンマ線の計数率を1%の精度で求めるには、合計何分間、線源を置いた計数を行えばよいか。但し、答えは分単位で小数点以下繰上げとする。また、線源を置かない計数をやり直さないとする。
4. 線源から放射されるガンマ線のエネルギーが、(a) 0.5 MeV、(b) 5 MeV の単一エネルギーの場合において、出力部回路からの出力パルスをエネルギーに換算した度数分布を予想して図示せよ。その際、各々の分布の中で、設問1の相互作用がどの成分を占めるかも分かるように示すこと。
5. 設問4の(a)、(b)の2種類の線源から放射されるガンマ線のエネルギーがおおよそ分かっているが、正確には分かっていないとする。NaI 検出器を1個だけ用いても、バックグラウンド放射能が高いこと、および、設問1の3つの相互作用が混在することにより、エネルギーを正確に求めることが困難な状況とする。このような場合でも、同じNaI 検出器を複数組み合わせる工夫によって、ガンマ線のエネルギーを正確に求められる。設問4の(a)、(b)各々の場合について、その工夫を図示し、ガンマ線のエネルギーが正確に求められる理由を説明せよ。

第6問

液体ヘリウムの密度は、図1のように平行平板コンデンサーとコイルを並列につないだLC回路を作り、コンデンサーの間隙を液体ヘリウムで満たしてコンデンサーの容量を測定し、求めることができる。

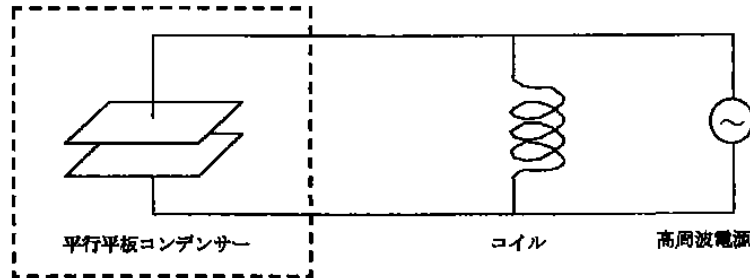


図1

ヘリウムの分極率を  $\alpha$  とすると、密度  $\rho$  と比誘電率  $\epsilon$  との間には次の式が成り立つ。ただし、 $k$  は比例定数である。また、 $\epsilon$  は真空の誘電率  $\epsilon_0$  に対する誘電率の比であり、無次元の量である。

$$\frac{1}{k} \alpha \rho = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

ヘリウムの分極率は温度と圧力にほとんど依存しないことが知られているため、この実験方法は、密度の温度依存性、圧力依存性などを調べるときに用いられる。以下の設問に答えよ。

1. 図1のLC回路において、平行平板コンデンサーの間隙が真空のときの容量を  $C_0$ 、コイルのインダクタンスを  $L$  として共振振動数 ( $f_0$ ) を求めよ。回路の抵抗、浮遊容量は考えなくてよい。
2. 室温で図1のLC回路の  $f_0$  を測定したところ 10 MHz となった。このとき、コイルのインダクタンスは  $10 \mu\text{H}$ 、コンデンサーの平行平板の面積は  $1.0 \times 10^{-4} \text{m}^2$  であった。コンデンサーの間隙はいくらか。コンデンサーの間隙は真空とし、真空の誘電率 ( $\epsilon_0$ ) を  $8.9 \times 10^{-12} \text{F/m}$  として求めよ。
3. コンデンサーの間隙を真空に保ったまま、図1の点線で囲まれた部分の温度を下げて共振振動数を測定したところ、温度の低下と共に共振振動数が変化した。考えられる原因について述べよ。
4. コンデンサーの間隙を液体ヘリウム (密度  $\rho$ ) で満たしたときの共振振動数 ( $f$ ) を  $\rho$  の関数で表し、4.2 K の液体ヘリウム ( $\rho = 1.3 \times 10^2 \text{kg/m}^3$ ) で満たしたときの共振振動数を求めよ。  $\alpha/k = 1.1 \times 10^{-5} \text{m}^3/\text{kg}$  である。
5. 共振振動数の測定精度が 1Hz のとき、液体ヘリウムの密度の測定精度がいくらになるか述べよ。

6. 図 2 は、この方法を使って、液体ヘリウムの密度  $\rho$  をある温度  $T_0$  (2.2 K) の近傍で測定し、 $T_0$  での密度  $\rho_0$  に対する相対値を表したものである。この図をもとに、温度  $T_0$  付近での液体ヘリウムの密度の温度依存性の特徴とその原因について述べよ。

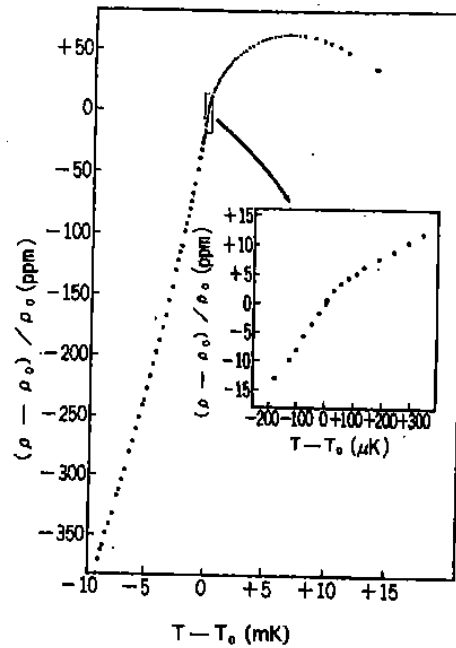


図 2

7. 低温実験では、白金、炭素、ゲルマニウムなどの抵抗値を測定して 2 次温度計として利用することが多い。図 3 は、白金抵抗温度計と炭素抵抗温度計の抵抗値の温度依存性を示したものである。図 2 に示した液体ヘリウムの密度の温度依存性の測定には、どちらの温度計を用いるのが適当か、その理由と共に述べよ。

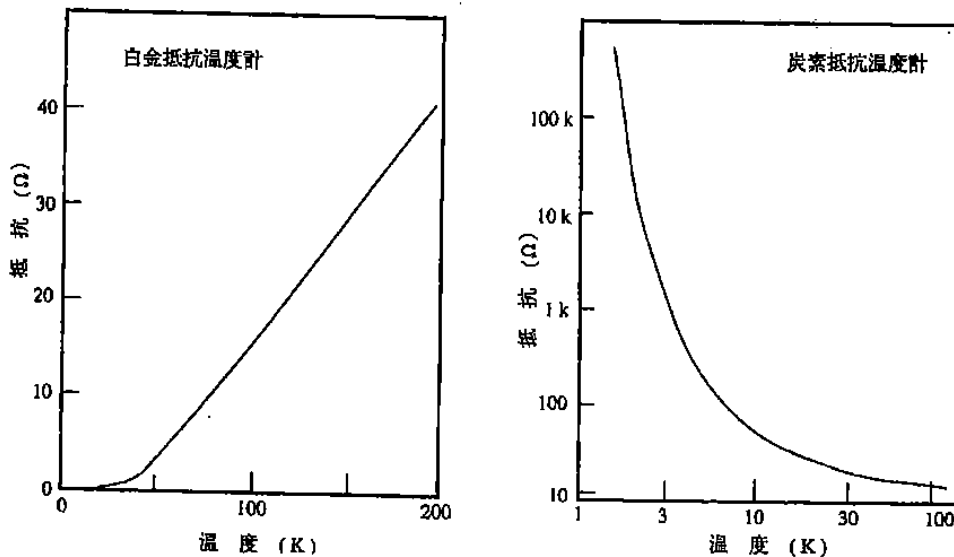


図 3

8. 図 3 からわかるように、白金抵抗温度計の抵抗値が温度の増加と共に大きくなるのに対し、炭素抵抗温度計の抵抗値は温度の増加と共に小さくなる。それぞれの抵抗温度計の抵抗値が示す温度依存性の原因を述べよ。

## 第7問

高エネルギー加速器からの陽子ビームを金属標的に当てると、正に帯電した二次粒子として  $K$  中間子の他、 $\pi$  中間子、 $\mu$  粒子などが作られる。このうち、正に帯電した  $K$  中間子をビームラインに誘導することを考える。荷電  $K$  中間子、荷電  $\pi$  中間子、中性  $\pi$  中間子の質量はそれぞれ、 $494\text{MeV}/c^2$ 、 $140\text{MeV}/c^2$ 、 $135\text{MeV}/c^2$  である。光速  $c$  は  $3.0 \times 10^8 \text{m/s}$  とする。全問にわたり数値計算は有効数字 2 桁で求めよ。

金属標的で作られた二次粒子に、進行方向に垂直な磁場を与えると、運動量に比例した軌道半径の円運動をする。 $1.0\text{GeV}/c$  の  $K$  中間子を取り出すつもりで与えた磁場で、 $K$  中間子以外の粒子にも同じ軌道を飛行するものがある。磁場を通過した後、進行方向と垂直に一樣電場を加えることで粒子を種類別に振り分けることができる。

質量  $m$ 、運動量  $p$  の荷電粒子(電荷  $e$  を持つ)が電場  $E$  中を通過するとき、相対論的な運動方程式  $d\mathbf{p}/dt = e\mathbf{E}$  を満たす。

1. 図1のように、この荷電粒子が電場領域に入射する方向を  $y$  軸、それに垂直な電場の方向を  $x$  軸にとる。荷電粒子が電場領域に入射したときの運動量を  $p_0$  とする。電場領域に入射したときから時間  $t$  経過した後の荷電粒子のエネルギー  $\varepsilon$  を求めよ。

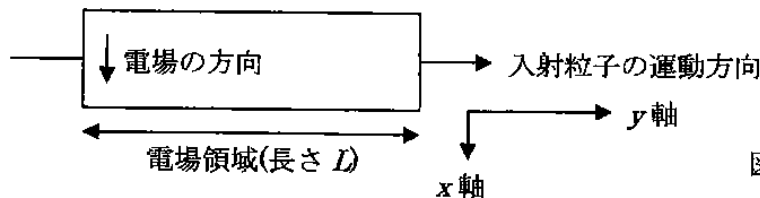


図1:

2. 一般に荷電粒子のエネルギー  $\varepsilon$ 、運動量  $p$  と速度  $v$  には  $v = pc^2/\varepsilon$  の関係がある。このことを用い、さらに時間積分することにより、荷電粒子の座標  $x$  と  $y$  を求めよ。必要

ならば積分公式  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$  を使うこと。

3. 長さ  $L$  の電場領域を出たときの荷電粒子の進行方向が  $y$  軸となす角度を求めよ。
4. 振れ角が十分に小さいとして、荷電  $K$  中間子の振れ角に比べ、同じ  $1.0\text{GeV}/c$  の運動量で入射した荷電  $\pi$  中間子の振れ角はおよそどのくらいになるか。

$K$  中間子を金属に入射し、その中で完全に停止させる。荷電  $K$  中間子は 63% が  $\mu$  粒子と  $\mu$  型ニュートリノに、21% が荷電  $\pi$  中間子と中性  $\pi$  中間子 ( $\pi^0$ ) に二体崩壊する。ここでは  $\pi$  中間子への崩壊に着目する。

中性  $\pi$  中間子は  $\tau = 8.4 \times 10^{-17}$  秒という非常に短い時間に崩壊し、2 つのガンマ線になる。実験室系で見たときの中性  $\pi$  中間子の静止座標系の移動速度を  $v$  とする。二つの系の間の

ローレンツ変換は  $p' \sin \theta' = p \sin \theta$  および  $p' \cos \theta' = p \cos \theta \cdot \gamma - E\gamma\beta/c$  で与えられる。ここで  $\beta \equiv \frac{v}{c}$ ,  $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  である。'がついたものは重心系、そうでないものは実験室系を表す。  $\theta$  および  $\theta'$  はそれぞれの系での粒子の運動方向が静止座標系の移動方向となす角度を表す。

5. 中性  $\pi$  中間子の進行方向を  $x$  軸にとるとき、2つのガンマ線が  $x$  軸について対称な方向に等しい運動量の絶対値をもって放出されたとする。このときガンマ線が  $x$  軸となす角度を計算せよ。  $\beta$  を用いてよい。

上述のように中性  $\pi$  中間子の寿命  $\tau$  は非常に短い。この寿命をどのように測定するかを考えよう。

6. 実験室系で中性  $\pi$  中間子が飛行中に崩壊する。作られてから崩壊するまでの平均距離が 25 ミクロン程度となるためには、生成された中性  $\pi$  中間子のエネルギーはどのようなものでないといけないか。

中性  $\pi$  中間子は電磁相互作用をしないが、崩壊生成物であるガンマ線は物質中で対生成を起こす。2枚の金属薄膜を近接しておき、高エネルギー陽子ビームを当てると、薄膜中で中性  $\pi$  中間子が作られる。最初の薄膜中で生成された中性  $\pi$  中間子は短い距離を飛んだのち崩壊し、2個のガンマ線になる。ガンマ線になると一定の確率で、金属薄膜中で対生成を起こす。図2にあるように、一枚目の薄膜中で中性  $\pi$  中間子が作られ、薄膜の間で崩壊し、2枚目の薄膜中で対生成を起こすものに着目する。

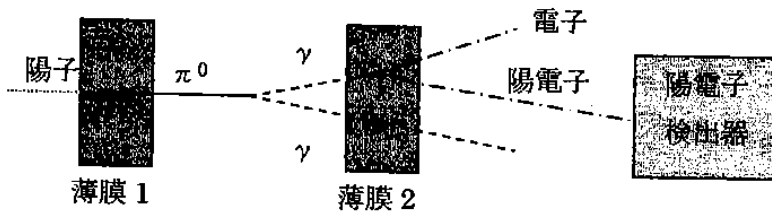


図 2:

7. 対生成で生じた陽電子をビーム進行方向の陽電子検出器で観測する。まず、2枚の薄膜を最接近させた状態で陽電子を計測し、その後、薄膜間の距離を  $d$  だけ増やして計測する。このときの陽電子の計測率の変化について説明せよ。
8. 薄膜間の距離の変化に対する感度を最も高くするためには、薄膜の厚さはどうとるべきか考察せよ。

### 第8問

図1は人の眼の断面図である。眼に入射する光は、まず空気と角膜との境界面で屈折し、さらに水晶体の前面と後面で2度屈折し、網膜上に像を結ぶ。網膜上で光は電気信号におきかえられ、視覚情報として視神経を通して脳に伝えられる。

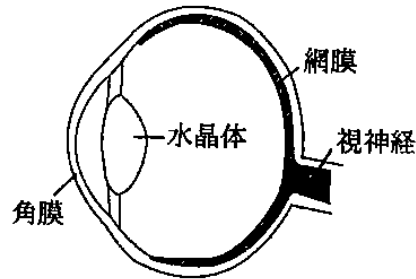


図1

まず光学器械として眼をとらえよう。人の眼全体で起こる光の屈折の大部分は空気と角膜の境界面で生じている。水晶体における屈折を無視した時の、角膜による像形成(図2)を考える。物体  $OO'$  と角膜との距離を  $p$ 、角膜と像の形成位置  $I$  との距離を  $q$ 、空気中および角膜内の屈折率を  $n_1, n_2$  とする。角膜表面を球面の一部とみなし、その中心を  $C$ 、半径を  $r$  とする。

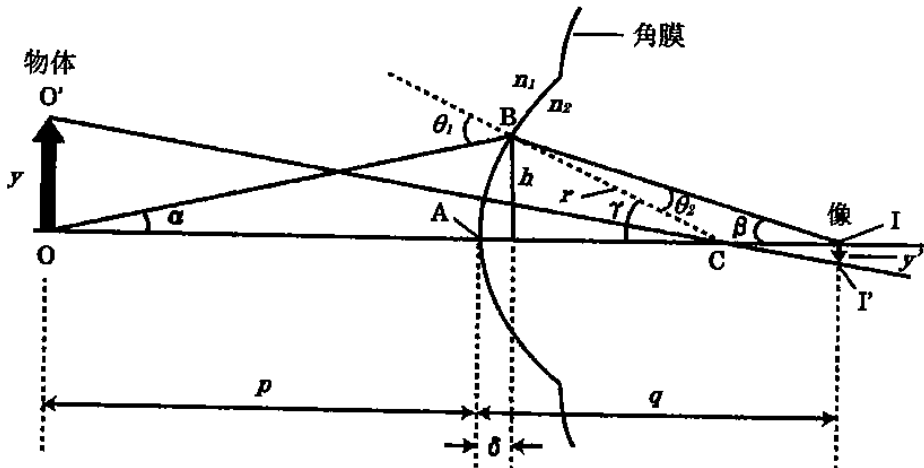


図2

1. 光線  $OBI$  に着目する。点  $B$  と直線  $OI$  との距離を  $h$  とし、図中の角  $\alpha$  ( $\angle BOI$ )、 $\beta$  ( $\angle BIO$ )、 $\gamma$  ( $\angle BCO$ ) を  $h, p, q, r$  で表せ。なお、図中の距離  $\delta$  は  $p, q, r$  に比べて無視できるものとし、 $\alpha, \beta, \gamma \ll 1$  ラジアンとする。
2. 光線  $OBI$  の入射角、屈折角を  $\theta_1, \theta_2$  とし、 $\theta_1, \theta_2, n_1, n_2$  間の関係式を示せ。ただし、 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$  ラジアンとする。
3. 設問 1, 2 より  $n_1, n_2, p, q, r$  間の関係式を求めよ。

4. 網膜における像の拡大率  $m (=y'/y)$  を  $n_1, n_2, p, q$  で表せ。
5.  $p = 25 \text{ cm}$ 、 $p = \infty$  の時、 $q$  の値をそれぞれ有効数字2桁で求めよ。ただし、 $n_1 = 1.00$ 、 $n_2 = 1.34$ 、 $r = 0.80 \text{ cm}$  である。
6. 設問5で求めた  $q$  の値と角膜と網膜との間の実際の距離  $2.5 \text{ cm}$  を比べることにより、どのようなことが分かるか。水晶体の役割を含め説明せよ。

次に網膜上の像が視神経を介し脳へと投射される過程を考察する。

7. 各視神経は図3の点Aと点A'、点Bと点B'といった具合に、網膜上の特定の点と1次視覚野上の対応する点とを結ぶように配線される。このように各視神経が網膜上での相対的な位置を保ったままで1次視覚野に結合する結果、脳内において網膜上の像が再現される。カエルの視神経が、図3で示すような位置で切断されても再生する能力をもつことを利用し、視神経の正確な配線のパターンが遺伝的に決定されているのか、それとも学習によって獲得されるのかを検討する実験を考案せよ。

8. 実際には視神経の配線は、大部分、遺伝的に決定されていることが分かっている。したがって、各視神経と1次視覚野の特定の位置とを対応づける分子の存在が予想される。もし、このような分子(遺伝子にコードされていると仮定する)が視神経の数だけ必要であるとすると、遺伝子の数が断然不足することになる(視神経の数は100万のオーダーであるのに対し、ヒトの遺伝子の数は数万しかない)。この問題を回避するため生物がとっている戦略について考察せよ。

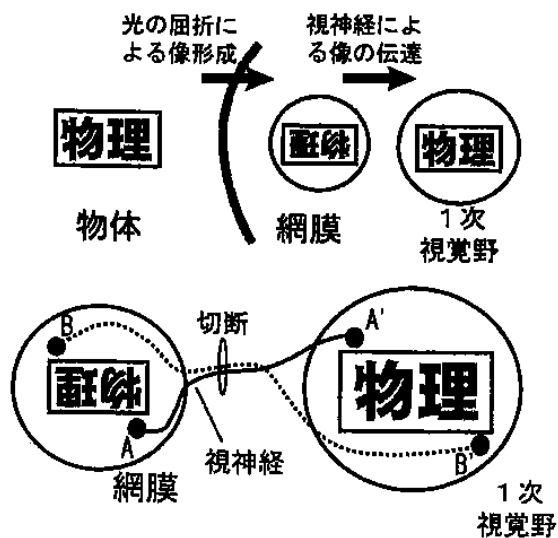


図3

第9問

幅  $b$  を持つ矩形ポテンシャル障壁  $V(z)$  による一次元電子の散乱を考える。 $V(z)$  の左 ( $z = -\infty$ ) から入射する電子の波動関数を  $\psi_l$ 、右から入射する電子のそれを  $\psi_r$  とすると、図1の様に  $z < -b/2$  及び  $z > b/2$  で

$$\psi_l(z) = \begin{cases} \exp[ikz] + R \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ T \exp[ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad (1)$$

及び

$$\psi_r(z) = \begin{cases} T \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ \exp[-ikz] + R \exp[ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad (2)$$

と表される。ただし、 $T, R$  はそれぞれ透過係数及び反射係数であり、 $T = e^{i\alpha} \sin(\gamma)$ 、 $R = ie^{i\alpha} \cos(\gamma)$  の様に位相差  $\alpha$  と散乱振幅に関係した量  $\gamma$  で表される。また、波数  $k$  は電子のエネルギー  $E$  と質量  $m$  を用いて次のように書ける。

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad (3)$$

1. 波動関数の一般解  $\psi$  は

$$\psi(z) = \begin{cases} A_{-1} \exp[ikz] + B_{-1} \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ A_0 \exp[ikz] + B_0 \exp[-ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad (4)$$

の様に書ける (図2)。一般解が線形独立解  $\psi_r, \psi_l$  の重ね合わせで書ける事を利用して、 $A_{-1}, B_{-1}$  と  $A_0, B_0$  の関係式を導け。また、それを式(5)の様に行列表示した時の、行列要素を  $\alpha, \gamma$  で表せ。(  $M$  は転送行列と呼ばれる。)

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

図1

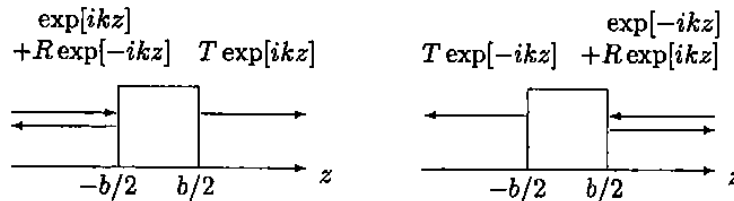




図 2

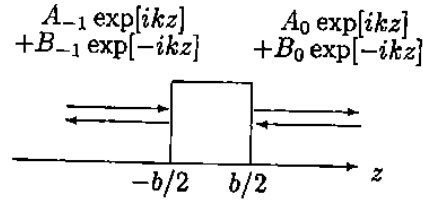
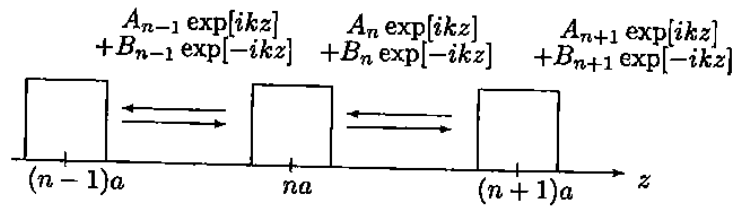


図 3



次に  $V(z)$  が間隔  $a (> b)$  で等間隔に並んでいる時 (すなわち一次元周期系) の電子状態を考える。図 3 の様に波動関数  $\Psi$  は  $na < z < (n+1)a$  かつポテンシャルがゼロになる領域で  $A_n \exp[ikz] + B_n \exp[-ikz]$  と書ける。今、 $-a + b/2 < z < a - b/2$  に注目し、 $\Psi$  がこの領域で線形独立解  $\psi_r, \psi_l$  の重ね合わせで書ける事を利用すると、ここでも式 (5) が成り立つ事、また一般に以下の関係が成り立つ事がわかる。

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

2. 周期系の波動関数  $\Psi$  はブロッホ条件  $\Psi(z+a) = \exp[iqa]\Psi(z)$  を満たす事が知られている。この条件を用いて  $A_n, B_n$  が満たすべき関係式を示せ。ただし、 $q$  はブロッホ波数である。(波数  $k$  は式 (3) によって定義されるエネルギーの関数であり、ブロッホ波数  $q$  とは直接関係するものではない事に留意せよ。)
3. ブロッホ条件と式 (6) が同時に成り立つ時、 $q$  と  $k$  は次の式で関係付けられる事を示せ。

$$\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)} \quad (7)$$

次に、 $\alpha, \gamma$  が波数  $k$  を介して

$$\gamma = \frac{\pi k}{2 k_c}, \quad \alpha = -c \frac{k}{k_c} \quad (8)$$

の様にエネルギーに依存している場合を考える。ただし、 $k_c, c$  は定数であり、 $\pi/2 < k_c a - c$  を満たす。以下、 $0 < k < k_c$  で示されるエネルギー範囲で考えよ。

4. 式 (7) の右辺の値を波数  $k$  の関数としてプロットせよ。
5.  $ka + \alpha$  が  $\pi$  の整数倍の時、式 (7) を満たす実数の  $q$  が存在しない事を示し、その物理的意味を述べよ。
6. 実数の  $q$  が存在するための  $k$  の条件を  $k_c, c, a$  を用いて示せ。
7.  $k_c a - c = 5\pi/2$  の場合、 $q$  と  $E$  の関係式 (すなわち分散関係) の概略図を示せ。