

平成16年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数 学 ・ 英 語

平成15年8月26日(火) 9時00分～11時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用すること。
3. 問題は全部で4問ある。4問のすべてに解答せよ。
4. 答案用紙は数学2枚、英語2枚(罫線入り)が配布されていることを確かめること。
5. 数学の解答は2枚とじ答案用紙に記入し、1問ごとに別のページを用いること。英語の解答は罫線入りの2枚とじ答案用紙に記入し、同じく1問ごとに別のページを用いること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(数学または英語)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。

数学

[第1問]

変数 x についての2次以下の次数の多項式のなす線形空間を V とする。

線形写像 $F: V \rightarrow V$ を以下のように定める。

$$\text{任意の } p(x) \in V \text{ に対して } F(p(x)) = p(ax + b).$$

ここで a, b は定数で、 $a \neq 1$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $F(x^2 + x + 1)$ を求めよ。

(2) V の基底を $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$ と選ぶ。このとき F の表現行列 M , すなわち

$$(F(e_0(x)), F(e_1(x)), F(e_2(x))) = (e_0(x), e_1(x), e_2(x))M$$

となる行列 M を求めよ。

(3) 線形写像 F の固有値, 固有ベクトルを求めよ。

(4) 任意の自然数 k について, F を $e_1(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。

(5) 任意の自然数 k について, F を $e_2(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。

[第2問]

(1) $u_k(x, t) = e^{ikx+i\omega t}$ とおく。 $u = u_k(x, t)$ が、次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たすように ω を定めよ。ただし、 a を正の定数、 x および t は実数とする。

(2) (1) で得られた $u_k(x, t)$ を用いて、上の偏微分方程式の解を

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x, t) dk$$

とおく。与えられた関数 $f(x)$ に対し、初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ をみたすように A_k を $f(x)$ を用いて表わせ。ただし、 k についての積分は実行しなくてよい。

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk$ を求めよ。ただし、 y は定数で、 $t > 0$ とする。

(4) (3) の結果を用いて (2) の k についての積分を実行し、初期値問題の解 $u(x, t)$ を求めよ。

(5) $f(x)$ が次のように与えられているとする。

$$f(x) = \begin{cases} U & \text{if } |x| \leq L \\ 0 & \text{if } |x| > L \end{cases}$$

ただし、 U と $L(> 0)$ は定数とする。このとき、 $u(x, t)$ を $\operatorname{erf}(z)$ を用いて表わせ。ここで、すべての実数 z について

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$$

と定義する。

英 語

[第1問] 次の英文はある国際研究集会の案内文である。これを読み、設問 (i) ~ (iv) に答えよ。

2nd Announcement - 6th International Interferometry Workshop October 1-3, 2003, US Atomics, San Diego, USA

Venue, Dates and Organizers

The 6th International Interferometry Workshop will be held at the main campus of US Atomics, in San Diego, California. The meeting duration is three days, October 1-3. The local scientific organizers are E. Kepler and T. Planck of UCLA, while US Atomics is providing meeting facilities and administrative support by Alice Newton.

Meeting Format

As at previous meetings, we wish to have a true 'workshop' format with opportunities for extensive interaction and discussion amongst participants. To this end, the meeting will consist of oral presentations (10-20 min duration) with scheduled periods for (a).

Workshop Dinner, Facility Visit

A dinner will be organized for the workshop participants, at participants' own cost - details to be announced later. A visit to the US Atomics facility will be arranged for those interested (please (b) if you are interested when responding).

Registration and Abstracts

All potential attendees should register by completing and returning the attached Foreign Visitor Form to Alice Newton by August 17, 2003 (see security requirements, below). US citizens should complete only the name and contact details, and indicate their citizen status. In order to prepare the scientific program an (c) should be sent to E. Kepler by August 22. Please submit electronically as either a Word or PDF file.

Proceedings

As at previous meetings, participants should submit copies of their (d) for inclusion in the CD-ROM which will be distributed to all the participants after the workshop. Participants are also encouraged to submit a written (e) for the Proceedings as a more complete record of their work, with a maximum length of 10 pages.

Security Requirements

As a DOE facility, access to the US Atomics site is restricted. All non-US citizens MUST (f) and return the accompanying "Foreign Visitor Form" (attached below). All prospective foreign attendees should return this form as soon as possible, no later than 45 days before the meeting (August 17, 2003).

Hotel Accommodations and Transport

Accommodation at a discounted rate is available in a number of local hotels. A hotel reservation form follows below, which includes web links. All participants are requested to return it to Alice Newton. With regard to transport, you will find it most flexible if

you can (g) a car and drive yourself. For those not renting, details of shuttle vans and public transport will be provided later.

Visitor Information

Information for visitors to US Atomics is available at <http://web.usat.com/visitors/> which provides links to maps, information on things to (h) and see in the vicinity, airport information, etc. The online map shows the location of a number of the local hotels.

Interferometry : 干渉計測

DOE : Department of Energy

UCLA : University of California, Los Angeles

- (i) 研究集会参加者が文中の人物 Alice Newton に送らなければならない書類を全て列挙せよ。ただし、英語、日本語どちらで答えてもよい。
- (ii) この案内文中で、「後日案内する」とされている項目を全て列挙せよ。ただし、英語、日本語どちらで答えてもよい。
- (iii) 文中の(a) ~ (h) に当てはまる語を以下のリストから選択せよ。ただし、同じ語を二回以上選択してはならない。
abstract, complete, discussion, do, indicate, paper, presentations, rent
- (iv) 下記の状況設定のもとで、Dr. E. Kepler 宛の英文手紙をかけ。必要ならば適当に情報を追加してよい。

差出人の名前は夏目三四郎で、本郷大学の学生である。ごく最近、この研究集会の主題に関連した画期的な実験結果を得た。そこで、この研究集会に出席し、発表したいと思うが、参加申し込みの締め切り日はすでに過ぎている。

英語

[第2問] 次の英文を読んで、設問 (i)、(ii)、(iii) に答えよ。

The second law of thermodynamics is the law of decay. It says that isolated systems tend to become more disordered as time passes: that iced and hot tea soon become indistinguishable, that all living creatures must sicken and die, and that all machines must someday wear out.

Consider a room which is divided into two sections, A and B, by an impermeable partition where there is a pinhole. The air on both sides is at the same pressure and temperature. Randomly moving air molecules, some fast and some slow, pass through the pinhole in either direction. It may be unlikely, but surely it is possible, that most of the molecules passing from A to B happen to be fast, while most of those passing from B to A happen to be slow. If the process continues long enough, region B becomes unbearably hot while region A becomes frigid. The second law of thermodynamics is flouted! However, the probability of this occurrence is unimaginably tiny. It is as unlikely as flipping a fair coin a billion billion times and coming up heads every time. It is so unlikely as to be, for any practical purpose or otherwise, impossible.

Enter James Clerk Maxwell, the nineteenth-century physicist. He proposed a scheme to evade the second law that does not rely on chance. "Now consider a creature," he wrote, "who knows the paths of all the molecules, but who can do no work but to open and close the hole in the diaphragm." This hypothetical being, known as Maxwell's demon, allows fast molecules to pass from A to B and slow molecules to pass from B to A. All others find the door closed. In this case, a temperature difference between the two regions will certainly develop. The second law is undone "by the intelligence of a very observant and neat-fingered being."

There is a loophole to this argument; you can't fool Mother Nature. The system consisting of room, diaphragm, door, and demon is not isolated. The metabolism of the imaginary being must be taken into account. Whether it be microbe, machine, or genetically engineered monster, it must be connected to the outside world to take its sustenance and eject its waste products. When these are taken into account, the order created in the room is necessarily compensated, or more than compensated, by the disorder produced outside its walls.

flout : (規則を) 無視する、侮辱する	evade : (巧みに) 避ける、逃れる
diaphragm : 隔壁	metabolism : (新陳) 代謝
microbe : 微生物	sustenance : 食物、栄養物

- (i) 文中の下線部を和訳せよ。
- (ii) この英文では、「マックスウェルの悪魔」が存在して熱力学の第2法則が破れることがあり得ると言っているのか、あり得ないと言っているのか、理由も含めて200字程度の日本語で答えよ。
- (iii) 熱力学の第2法則を表す具体的な例を50 words程度の英語で示せ。ただし、この英文とは別の例を挙げること。