物理学演習 II 中間試験　解答　　2016.11.22 実施

1. 【1】、【2】を別々の解答用紙に解答すること。
2. すべての解答用紙に氏名および学生証番号を書くこと。
3. 問題文で使われていない記号を導入するときは、定義を明確にすること。
4. t は時間変数とし、任意の物理量 Ω の１階時間微分はドットを用いて $\dot{\Omega}$ と表記する。それ以外の記号は特に断りが無い限り定数として扱う。

【1】以下の問題に答えよ。

1. ２次元空間においてポテンシャル $U(x,y) = A(x^2+y^2)^{n/2}$ のもとでの質量 m の質点の運動を考える (A : 実定数; n : 整数)。

   (i) 運動を記述するラグランジアン $L(x,y,\dot{x},\dot{y})$ を書き下せ。

   (ii) 循環座標および L が時間を露わに含まないことに起因する保存量を各々指摘せよ。

   (iii) 円運動解 ($x^2+y^2 =$ 一定) が存在するために A が満たすべき条件を述べよ。以下の問題では A はこの条件を満たすものとする。

   (iv) 同一質量 m をもつ質点が多数、ポテンシャル $U(x,y)$ に従い原点中心の円運動を行っているとする。各円運動の周期 $T_1, T_2, ...$ および半径 $l_1, l_2, ...$ の間に関係 $T_1 l_1 = T_2 l_2 = \ldots$ が成り立つとき、次数 n を推定せよ。その際、各円運動は半径方向の微小な摂動に対して安定か？　なお質点同士の相互作用はないものとする。

2. ３次元空間において重力ポテンシャル $U(z) = mgz$ のもとで螺旋状の滑らかなレール $x = R\mathrm{cos}u, y = R\mathrm{sin}u, z = au$ (u: 実変数) 上に拘束された質量 m の質点の運動を考える。

   (i) ラグランジアン $L(z,\dot{z})$ を与えよ。

   (ii) z 座標の運動は自由落下の場合に比べて $g \to g'$ と変更しただけのものと見なせる。g' の形を与えよ。

   (iii) 運動方程式を解き、$z = z(t)$ の一般解を与えよ。

   (iv) 初期条件 $z(0) = 0$、$\dot{z}(0) = 0$ で定まる運動の間、質点がレールから受ける力について、次を各々時間の関数として与えよ: (a) 円柱座標でみた動径方向成分 F_r (b)F_r の方向とレールの接線方向双方に直交した成分 F_ξ (ヒント:未定乗数法を用いると分かりやすい)。

   (v) R 固定のもとで $a \to 0$ および $\to \infty$ とするとき、(iv) で求めた F_r, F_ξ は各々の極限でどうなるか。またその物理的な解釈を述べよ。(F_r, F_ξ の具体形が得られていなくても、「どのようになるべきか」という観点で議論してよい。)

【2】以下、q は正準座標、p はそれに共役な正準運動量とする。添え字付き正準座標 q_i に共役な正準運動量は p_i とする。正準座標 Q_i に共役な正準運動量は P_i とする。以下の問題に答えよ。

1. ラグランジアンが $L=\frac{m}{2}\dot{q}^2+\frac{m}{2}\omega^2a^2\left[\sin^2\frac{q}{a}-(1-\cos\frac{q}{a})\right]$ で与えられるとき、対応するハミルトニアンを与えよ。また、q と p についての正準方程式を求めよ。

2. 調和振動子のラグランジアンを $L=\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{m}{2}\omega^2q^2$ とするとき、対応するハミルトニアンを与えよ。また、$F_1\equiv q^2$、$F_2\equiv qp$、$F_3\equiv p^2$ とするとき、各々の時間微分 $\dot{F}_i$ を q,p の関数として与えよ。

3. 正準変数 $(q_i,p_i)(i=1,2,3)$ でのハミルトニアンを $H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)$、$(Q_i,P_i)(i=1,2,3)$ へ正準変換したときのハミルトニアンを $K(Q_1,Q_2,Q_3,P_1,P_2,P_3)$ とする。母関数 $W(p_1,p_2,p_3,Q_1,Q_2,Q_3)$ を用いて
$$\left(\sum_{k=1}^{3}p_k\dot{q}_k\right)-H=(\sum_{k=1}^{3}P_k\dot{Q}_k)-K+\frac{d}{dt}\left[W+\left(\sum_{k=1}^{3}p_kq_k\right)\right]$$
が成立するように正準変換を定める。$W=-(p_1Q_1\sin Q_2\cos Q_3+p_2Q_1\sin Q_2\sin Q_3+p_3Q_1\cos Q_2)$ のとき、Q_i,P_i を q_i,p_i の関数として与えよ。

4. 減衰振動する振り子に対応するラグランジアンを $L(q,\dot{q},t)=\frac{m}{2}e^{2\gamma t}(\dot{q}^2-\omega^2q^2)$ とする。このラグランジアンに対応するハミルトニアン $H(q,p,t)$ を求めよ。つぎに、求めたハミルトニアンに対して、$W(q,P,t)\equiv qPe^{\gamma t}$ を母関数とする正準変換によって得られるハミルトニアン $K(Q,P,t)$ を与えよ。ただし、正準変換は $p\dot{q}-H=P\dot{Q}-H+\frac{d}{dt}(W-PQ)$ が成立するよう定める。

5. q_1,q_2,p_2,p_2 を正準変数とする。$S_1\equiv\frac{1}{2\omega}(p_1p_2+\omega^2q_1q_2)$ と $S_2\equiv\frac{1}{4\omega}\{(p_2^2-p_1^2)+\omega^2({q_2}^2-{q_1}^2)\}$ の間のポワソン括弧 $\{S_1,S_2\}$ を正準変数の関数として与えよ。なお、ポワソン括弧は $\{q_i,p_i\}=1$ となるように定義する。

6. ラザフォード散乱を解析するために用いられるラグランジアンとして
$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2+{\dot{q}_2}^2\right)-\frac{\kappa}{\sqrt{{q_1}^2+{q_2}^2}}$$
が挙げられる。いま、Q_1 および Q_2 が $q_1=2\sqrt{Q_1Q_2}$ および $q_2\equiv Q_2-Q_1$ を満たすとき、L を Q_i および $\dot{Q}_i$ の関数として与えよ。また、Q_i および P_i の関数として対応するハミルトニアンを与えよ。 次に、このハミルトニアンが定めるハミルトン・ヤコビ方程式の一般解を $S(Q_1,Q_2,t)=W_1(Q_1)+W_2(Q_2)-Et$ とし、W_1 と W_2 が満たすべき微分方程式を求めよ。（ちなみに、このように変数分離法が適用可能になる場合が存在することが、あえて偏微分方程式を導入することの利点の一つである。）

【1】

コメント: 全体的な正解率は高かった．2(iv) はやや計算力を必要とする問題である．2(v) は「何が起こっているのか」を適切に思い浮かべる事ができれば (iv) を経由しなくても解答可能である．予想外に誤りが多かったのが【1】3 である．以下でも述べるが，この問を間違えた者は重大な点について理解が曖昧である可能性があるので，気をつけて復習を行ってほしい．

1. (i)

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - A(x^2 + y^2)^{n/2} \tag{1}$$

(ii) 円柱座標へ変換 ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) すると，

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - Ar^n. \tag{2}$$

循環座標は θ である．これに対応して $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ が保存量となる，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \equiv mh. \tag{3}$$

また，L は t を露わに含まないことから，次の量も保存量である．

$$\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Ar^n \equiv E. \tag{4}$$

(iii) r についての運動方程式は

$$mr\dot{\theta}^2 - Anr^{n-1} - m\ddot{r} = 0 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{An}{m}r^{n-1}. \tag{6}$$

$\dot{r} = 0$ という解が存在するのは $\ddot{r} = 0$ を満たす $r \equiv r_0$ が存在するときである．上式より，

$$\frac{An}{m}r_0^{n+2} = h^2 \tag{7}$$

意味のある解 $r_0 \geq 0$ が存在するのは，(I)$n \geq 1$ ならば $A > 0$ のとき，(II) $n = 0$ なら A は任意，(III) $n \leq -1$ ならば $A < 0$ のとき．なお，$n = 0$ のときは $r_0 = 0$ という解しか許されないことに注意.

コメント: 意外なほど間違いが多かった問題である．この問を間違えた者は，系のモデルパラメータと，そこでの運動を表す変数の区別が曖昧である可能性があるので注意を願いたい．円軌道の半径を r_0 として $A = (r_0$の関数$)$ として解答終了，という答案が多かったが,「r_0 の値はどんなものでもよいので，とにかく円軌道が実現するにはどうすればよいか」と言う点を問われていることに注意されたい．この際に答えるべき条件式はモデルパラメータの間に成立するものであり，そこに運動の変数である r_0 が入ってはならない．

(iv) $n \neq 0$ としよう．円運動について $h = r_0^2\dot{\theta}$($\dot{\theta}$: 定数) なので，r_0 は次を満たす

$$\frac{An}{m}r_0^{n+2} = (r_0^2\dot{\theta})^2 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_0}{\dot{\theta}} = r_0^{\frac{4-n}{2}}\sqrt{\frac{m}{An}}. \tag{9}$$

(左辺)$= Tl/2\pi$ (T: 円運動の周期; l: 半径) なので，これが l に依存しない普遍定数となるのは $\underline{n=4}$ のとき．

運動の安定性については，$h = r^2\dot{\theta}$ を全エネルギーの表式へ代入すると，

$$E = E(r, \dot{r}) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{Ar^4 + \frac{mh^2}{2r^2}}_{\equiv U(r)}. \tag{10}$$

上で下線部分で定義される有効ポテンシャル $U(r)$ が極値を与える $r = r_0$ は円運動の半径に対応する．この点において $U(r)$ は下凸であるので，各円運動は摂動に対して安定．

<u>コメント</u>: 運動の安定性については，円軌道からの摂動変化分についての運動方程式を導出して，力が復元力となることを示す方針でもよい (持ち帰り No.1 【2】)．その場合も同じ結果が得られる．

2. (i) 拘束の無い 3 次元自由落下運動のラグランジアンは

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz \tag{11}$$

$t = z/a$ より，$\dot{x} = -(R/a)\dot{z}\sin(z/a)$，$\dot{x} = (R/a)\dot{z}\cos(z/a)$．これらを代入して，

$$L(z, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)\dot{z}^2 - mgz. \tag{12}$$

(ii)

$$L(z, \dot{z}) = \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)\left[\frac{m}{2}\dot{z}^2 - mg'z\right] \quad \left(g' \equiv g\frac{1}{1 + (\frac{R}{a})^2}\right). \tag{13}$$

括弧 [ ] の中身は 1 次元自由落下のラグランジアンについて g を g' に置き換えたものである．定数倍だけ違うラグランジアンは同じ運動方程式を与えるので，問われている g' の具体形は上で定義した通り．

(iii)

$$z(t) = -\frac{g'}{2}t^2 + At + B \quad (A, B : \text{実定数}) \tag{14}$$

(iv) 拘束条件を円筒座標で表すと次の 2 条件: $r = R$，$\theta = z/a$．この条件下での運動は未定乗数 λ_1, λ_2 を含んだ次のようなラグランジアンで与えられる．

$$L(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz \underbrace{- \lambda_1(r - R) - \lambda_2(\theta - \frac{z}{a})}_{\equiv -U(r,\theta,z)} \tag{15}$$

各自由度についての Euler-Lagrange 方程式は

$$r: \quad mr\dot{\theta}^2 - \lambda_1 = m\ddot{r}, \tag{16}$$

$$\theta: \quad -\lambda_2 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \tag{17}$$

$$z: \quad -mg + \frac{\lambda_2}{a} = m\ddot{z} \tag{18}$$

レールから質点に与えられる力は，上で下線部により定義されたポテンシャル U から $-\nabla U$ で与えられる：$F_r = -\lambda_1$，$F_z = \lambda_2/a$.

これら F_r, F_z を用いて角度方向の力 F_θ および，問われている F_ϕ を求める．図 1 はレール上を転がる質点のある瞬間の様子を軸 $x = y = 0$ 上の適当な点から r 方向に見たものである．各力は矢印の方向を正とする．また，ここでレールの斜度 (水平面となす角度)ψ を定義しておく．自明に $\tan\psi = a/R$ である．

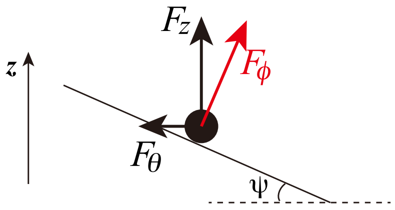

図 1: レール上を運動する質点の r 方向からのスナップショット．

まず質点の受ける力のレール接線方向はゼロとなるはずなので，

$$F_z \sin\psi + F_\theta \cos\psi = 0 \tag{19}$$

また F_ϕ を F_z と F_θ で表すと

$$F_\phi = F_z \cos\psi - F_\theta \sin\psi \tag{20}$$

式 (19) を (20) へ代入して

$$F_\phi = F_z / \cos\psi. \tag{21}$$

ここで今考えている運動に対応して λ_1 および λ_2 を決める．初期条件から $z(t) = -\frac{1}{2}g' t^2$. 拘束条件より $\dot{r} = 0$ なので，

$$\lambda_1 = mr\dot{\theta}^2 = mR\left(\frac{\dot{z}}{a}\right)^2 = m\frac{R}{a^2}g'^2 t^2. \tag{22}$$

問題 (ii) より $m\ddot{z} = -mg'$ となるので，

$$g - \frac{\lambda_2}{ma} = g' \Leftrightarrow \lambda_2 = ma(g - g') \tag{23}$$

以上より，

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{mRg'^2}{a^2}t^2 = -\frac{mg^2t^2}{R}\frac{\Delta^2}{(1+\Delta^2)^2} = -\frac{mg^2t^2}{R}\frac{\Delta^{-2}}{(1+\Delta^{-2})^2} \quad (\Delta = \frac{R}{a}), &(24)\\ F_\phi &= m(g - g') \times \frac{1}{\cos\psi} \\ &= m(g - g')\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2} = \frac{mg}{\sqrt{1+\Delta^{-2}}} = \frac{mg}{\sqrt{1+\Delta^2}}\Delta &(25) \end{aligned}$$

(iv 別解) $F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$ を直接評価してもよい.

コメント: 図 1 の F_z を，問われている F_ϕ と誤解した答案が多かった.

(v)

$a \to 0$ つまり $\Delta \to \infty$ 極限は，すなわち $z=0$ 平面上にある単なるリングの上に質点を初速度ゼロで置いた場合に対応する．質点は静止し続けるので，$F_r = 0$(遠心力が無い)，$F_\phi = mg$(重力を打ち消す).

$a \to \infty$ つまり $\Delta \to 0$ 極限は，すなわちレールの斜度無限大の場合に対応する．この際運動は自由落下と同様とみなせるはずであるので，拘束力は働かず $F_r = 0$，$F_\phi = 0$.

(iv) で求めた表式はその通りになっている.

コメント: $a \to 0$ において質点が円上を等角速度運動するという答えが散見されたが，“静止する”というのが正しい．a ノンゼロからの極限をとっていることに注意.

【2】

1. 対応するハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}(\omega a)^2 \left[\sin^2\frac{q}{a} - (1-\cos\frac{q}{a})\right]$$

であり、正準方程式は

$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$
$$\dot{p} = \frac{m}{2}a\omega^2 \left[2\cos\frac{q}{a}\sin\frac{q}{a} - \sin\frac{q}{a}\right]$$

となる。

2. まず、対応するハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}(\omega q)^2$$

である。正準方程式より $\dot{q}$ および $\dot{p}$ を p, q の関数として求めれば、

$$\frac{d}{dt}q^2 = \frac{2qp}{m}$$
$$\frac{d}{dt}qp = \frac{p^2}{m} - m(\omega q)^2$$
$$\frac{d}{dt}p^2 = -2m\omega^2 pq$$

となる。

3. W による正準変換は

$$H = K$$
$$q_k = -\frac{\partial W}{\partial p_k}$$
$$P_k = -\frac{\partial W}{\partial Q_k}$$

となる。ゆえに

$$
\begin{aligned}
q_1 &= Q_1 \sin Q_2 \cos Q_3 \\
q_2 &= Q_1 \sin Q_2 \sin Q_3 \\
q_3 &= Q_1 \cos Q_2 \\
P_1 &= p_1 \sin Q_2 \cos Q_3 + p_2 \sin Q_2 \sin Q_3 + p_3 \cos Q_2 \\
P_2 &= p_1 Q_1 \cos Q_2 \cos Q_3 + p_2 Q_1 \cos Q_2 \sin Q_3 - p_3 Q_1 \sin Q_2 \\
P_3 &= -p_1 Q_1 \sin Q_2 \sin Q_3 + p_2 Q_1 \sin Q_2 \cos Q_3
\end{aligned}
$$

となる。これらを解けば

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\
Q_2 &= \arcsin \sqrt{\frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\
Q_3 &= \arctan \frac{q_2}{q_1} \\
P_1 &= \frac{p_1 q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \frac{p_2 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \frac{p_3 q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\
P_2 &= \frac{p_1 q_1 q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + \frac{p_2 q_2 q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - p_3 \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \\
P_3 &= -p_1 q_2 + p_2 q_1
\end{aligned}
$$

となる。なお、同値だが異なる表現が複数存在し、具体形は途中の計算方法に依る。

4. 対応するハミルトニアンは

$$
H = e^{-2\gamma t} \frac{p^2}{2m} + e^{2\gamma t} \frac{m\omega^2}{2} q^2
$$

である。母関数 W による正準変換は

$$
\begin{aligned}
K &= H + \frac{\partial W}{\partial t} \\
p &= \frac{\partial W}{\partial q} = P e^{\gamma t} \\
P_k &= \frac{\partial W}{\partial P} = q e^{\gamma t}
\end{aligned}
$$

となるゆえ、新正準変数によるハミルトニアンは

$$
K = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 + \gamma Q P
$$

となる。

5. ポワソン括弧を求めれば

$$
\{S_1, S_2\} = \frac{1}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1)
$$

となる。

6. まず Q_1, Q_2 でのラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{Q}_1^2\left(1+\frac{Q_2}{Q_1}\right)+\dot{Q}_2^2\left(1+\frac{Q_1}{Q_2}\right)\right]-\frac{\kappa}{|Q_1+Q_2|}$$

である。これよりハミルトニアンを求めれば

$$H = \frac{1}{2m}\frac{Q_1}{Q_1+Q_2}P_1^2+\frac{1}{2m}\frac{Q_2}{Q_1+Q_2}P_2^2+\frac{\kappa}{|Q_1+Q_2|}$$

を得る。これを用いてハミルトン・ヤコビ方程式を導出すると

$$\frac{1}{2m}\frac{Q_1}{Q_1+Q_2}\left(\frac{dW_1}{dQ_1}\right)^2+\frac{1}{2m}\frac{Q_2}{Q_1+Q_2}\left(\frac{dW_2}{dQ_2}\right)^2+\frac{\kappa}{|Q_1+Q_2|}-E=0$$

を得る。これが変数分離形であることは、適当な定数 α を用いて

$$0 = \frac{Q_1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dQ_1}\right)^2+\alpha+\kappa-EQ_1$$
$$0 = \frac{Q_2}{2m}\left(\frac{dW_2}{dQ_2}\right)^2+\alpha-EQ_2$$

と変形できることからわかる。