平成１０年度入学試験問題

数学

〔注意事項〕

１．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。

２．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。

３．問題は全部で３問ある。３問のすべてに解答せよ。

４．答案用紙は、各問につき１枚、合計３枚配付してあるから、確実に配付されていることを確かめること。

５．各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。

６．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。

７．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。

８．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。

９．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。

１０．答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後の頁にある）。

数　　学　(平成9年8月)

次の3問の全部について解答せよ。解答は，各問ごとに別々の答案用紙を使うこと。

[第1問] 3行3列の実行列

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

について以下の設問に答えよ。

(a) $A\vec{e_1} = \lambda_1\vec{e_1}$，$A\vec{e_2} = \lambda_2\vec{e_2}$，$A\vec{e_3} = \vec{e_2} + \lambda_2\vec{e_3}$ を満たす実数値 λ_1，λ_2 および R^3 の単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ を求めよ。ただし $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ の第2成分は正とする。

(b) $A^n\vec{e_1}$，$A^n\vec{e_2}$，$A^n\vec{e_3}$ を $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ の一次結合で表せ。

(c) $\vec{r}$，$\vec{d}$ を R^3 のベクトルとする。このときベクトル列 $\vec{r_0}$，$\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\ldots$ を $\vec{r_0} = \vec{r}$，$\vec{r}_{n+1} = A\vec{r_n} + \vec{d}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ によって定める。ベクトル列の極限 $\lim_{n\to\infty} \vec{r_n}$ が任意の $\vec{r}$，$\vec{d}$ について常に存在するような a の範囲を求めよ。

[第2問] 関数 $y(x)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2 y=f(x)$$

について以下の設問に答えよ。ただしωは正の定数であり，x の範囲は $x\geq 0$ とする。

(a) $y=a(x)\cos\omega x+b(x)\sin\omega x$ とおいて上式に代入し，$\dfrac{da}{dx}$ と $\dfrac{db}{dx}$ に対する関係式を求めよ。ただし $\dfrac{da}{dx}\cos\omega x+\dfrac{db}{dx}\sin\omega x=0$ とする。

(b) $a(x)$ と $b(x)$ を求めよ。

(c) $f(x)=1/\lambda\ (0\leq x\leq\lambda)$，$0\ (x>\lambda)$ のとき，$y(x)$ を求めよ。ただしλは正の定数であり，$x=0$ で $y=\dfrac{dy}{dx}=0$ とする。

(d) (c) で得られた $y(x)$ の$\lambda\to 0$ の極限を求めよ。

[第３問]　Ａ，Ｂ２人があるゲームを繰り返し行う。Ａが２回続けて勝つまでゲームを続ける。各々のゲームでＡが勝つ確率は２／３とする。

(a) N回目のゲームでも終了しない確率をx_Nとする。x_Nをx_{N-1}，x_{N-2}で表せ。

(b) x_NをNの関数として求めよ。

(c) 行われるゲームの回数の期待値を求めよ。

平成１０年度入学試験問題

物理学

〔注意事項〕

１．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。

２．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。

３．問題は全部で３問ある。３問のすべてに解答せよ。

４．答案用紙は、各問につき１枚、合計３枚配付してあるから、確実に配付されていることを確かめること。

５．各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。

６．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。

７．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。

８．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。

９．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。

１０．答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後の頁にある）。

物 理 学（1997年8月）

[第1問]

転がり迫る石の球に追われている人がトロッコに乗って逃げるときに、逃げきれるか否かを以下の手順で考察しよう。

(1) 勾配θ の斜面を滑らずに転がり落ちる半径 r、質量 m 、中心のまわりの慣性モーメント I の回転体(円板、球など) の運動を考えよう。重力加速度を g、 斜面の回転体におよぼす転がりまさつ力を F、回転体の回転角を α、斜面に沿って測った回転体の中心位置を x とする。
回転体の運動は以下の連立方程式によって決定される。回転に関する運動方程式 (ii) を与えて、方程式を完成させよ。

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - F \qquad \text{(i)}$$

$$\qquad \text{(ii)}$$

$$\dot{x} = r\dot{\alpha} \qquad \text{(iii)}$$

但し、$\ddot{} \equiv d^2/dt^2, \dot{} \equiv d/dt$ である。

(2) 上の方程式 (i), (ii), (iii) を用いて回転体の全エネルギー、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mgx\sin\theta$$

が保存することを確認せよ。

(3) 以下の (a) 、(b) 、(c) に述べる三物体の運動は、m, Iを適当に定義すると、問 1 の方程式 (i) 、(ii) 、(iii) に従う。

(a) 一個の車輪を考える。半径は 20cm 、質量は 40kg であり、車輪の質量分布は一番外側の輪の部分に集中している円環 (リング) であるとする。これが斜面をすべらずに転がり落ちる運動を考える。

(b) トロッコを考える。トロッコを、一つの車輪からなり車軸の上に車台が乗っているものとモデル化する。車輪を (a) で考えた円環とし、それが質量の無視できる円盤により車軸とつながっており、車軸にはトロッコの車台の質量とそれに乗った人の質量をあわせた 360 kg の重量がかかっているとする。車輪は斜面をすべらずに転がり落ちるとし、車軸のまさつは無視する。

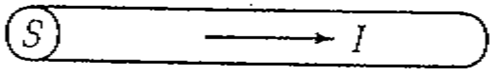
(c) 石球を考える。質量 $M = 2.0 \times 10^4$ kg 、半径 $R = 1.0$ m の石球が斜面をすべらずに転がり落ちるとする。球の中心のまわりの慣性モーメントは$\frac{2}{5}MR^2$ で与えられる。

上の (a) 、(b) 、(c) のそれぞれの物体の、斜面に沿った方向の加速度を g_a, g_b, g_cとする。勾配３０度の斜面を直線状下方に転がる場合に、$g_a : g_b : g_c$の比を求めよ。

(4) 問 (3) の (b) に述べたトロッコが動き始めた時、石球の中心はトロッコ後端から 6.0m のところにあり、秒速 3.0m で迫っていた。トロッコの車高は石球の半径に等しいとすると、石球はトロッコに衝突するかしないかを判定し、後者の場合には約何 m まで接近するかを計算せよ。計算には $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ を用いよ。

[第 2 問]

(1) 図のように断面積 S、長さ L の円柱導体に一様な定常電流 Iが流れている。その抵抗 Rは抵抗率ρにより $R=\rho L/S$と表せる。この導体中の電流密度 j(電流に垂直な単位断面積当たりの電流) はいくらか。また、導体中の電場 Eと電流密度 jとの関係を導け。



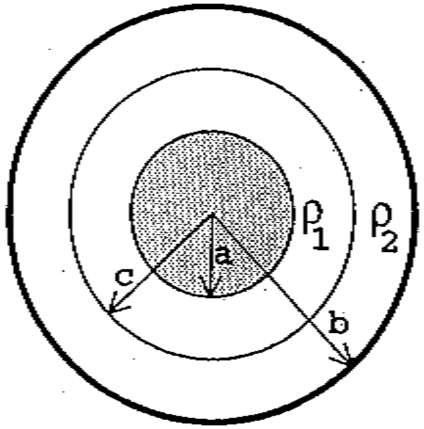
(2) 球形電極（半径 a ）と球殻電極（半径 b）が同心に配置されており、それらの間は半径 c のところで２層の球殻に分けられ ($a<c<b$)、内側に抵抗率 ρ_1 の導体、外側に抵抗率 ρ_2の導体が詰められている (右下に断面図を示す)。電極間に電圧をかけ、一様な定常電流 Iを流す。中心からの距離を rとして、以下の問に答えよ。なお、実際上、球に細い穴をあけ中心の電極に導線をつなぐが、その穴と導線の影響は無視できるものとする。また、電極、導線の抵抗率も十分小さく無視できるものとする。

イ） 電流密度 j、電極間の電場の強さ Eを rの関数で表せ。

ロ） 電極間の電圧 V、抵抗 Rを求めよ。

ハ） 中心の電極表面にたまっている全電荷 Q を求めよ。

ニ） 異なる導体の境界面にたまっている全電荷 Q'を求めよ。



[第 3 問]

気体の比熱においては、その体積を一定に保ちながら測る場合の定積比熱 $C_V = (\delta Q/dT)_V$ と、圧力を一定に保ちながら測る場合の定圧比熱 $C_p = (\delta Q/dT)_p$ とは値が異なる。但し、T は温度、V は体積、p は圧力、Q は熱量である。

(1) 1 モル の理想気体の状態方程式を書き、これを用いて理想気体 1 モルの C_V と C_p の関係を導け。但し、気体定数を R とせよ。

(2) 理想気体が準静的な断熱変化をするときに

$$C_V dT + p dV = 0$$

が成り立つことを示せ。

(3) 理想気体が準静的な断熱変化をするときに

$$pV^{C_p/C_V} = 一定$$

が成り立つことを示せ。

(4) ディーゼル機関ではシリンダー内で空気を圧縮して温度を上げ、重油の霧を点火させる。この圧縮が準静的かつ断熱的に行われ、空気は理想気体であると仮定しよう。重油の霧の点火温度が 627 ℃ の場合、シリンダー内の空気の体積を何分の一に圧縮させればこの点火温度に達するか、有効数字 2 桁で計算せよ。但し圧縮前の空気の温度は 27 ℃ であり、空気の比熱比は $C_p/C_V = \frac{7}{5}$ とする。