平成１１年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数　学　・　物　理

平成１０年８月２５日（火）　９時００分～１２時００分

【注意事項】

１．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。

２．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。

３．問題は全部で６問ある。６問のすべてに解答せよ。

４．答案用紙は３枚とじの同じものが２組（合計６枚）配布されていることを確かめること。

５．数学の解答は一方の３枚とじ解答用紙に記入し、１問ごとに別のページを用いること。物理の解答は他方の３枚とじ解答用紙に記入し、同じく１問ごとに別のページを用いること。

６．各答案用紙の所定欄に**科目名**(数学または物理)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。

７．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。

８．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。

９．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。

10．答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。

数　　学

[第1問]

以下の設問に答えよ。

(1) αを実数としたときに次の積分を複素積分の方法を用いて求めよ。

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin \alpha x}{x}$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x) = |x|$ のフーリエ級数展開を次のように表わしたとする：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

このとき次の設問 (i) (ii) に答えよ。

(i) $a_n \, (n = 0, 1, 2, \cdots), b_n \, (n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。

(ii) (i) の結果を用いて、次式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

数　学

[第2問]

3行3列の実行列 $A = \{a_{ij}\}$ が与えられているとき, 行列式 $\det[A - \lambda I]$ はパラメータ λ について3次の多項式となる。ただし, I は単位行列である。上の行列式を次のように書くことにする:

$$F(\lambda) \equiv \det[A - \lambda I] = -\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R$$

このとき以下の設問に答えよ。

(1) 上の3次式の係数 P, Q, R は次のように表せることを示せ。

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Tr}\, A \\ Q &= \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\, A^2 - (\mathrm{Tr}\, A)^2) \\ R &= \det A \end{aligned}$$

ここで, Tr は行列の対角和を意味する。

(2) 特に $P = 0$ のとき, 行列 $A = \{a_{ij}\}$ が複素共役の固有値をもつための条件を Q, R を使って表せ。

数　学

[第3問]

$H_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を x の n 次の多項式で次の性質を満たすものとする。

$$
\begin{aligned}
&H_n(x) = x^n + (n\text{より低次の多項式}) \\
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = 0 \qquad (n \neq m)
\end{aligned}
$$

(1) $n=1,2,3$ について $H_n(x)$ を具体的に構成せよ。ただし次の積分公式を用いて良い。

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2m} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\frac{(2m)!}{4^m m!} \qquad (m=0,1,2,\ldots)
$$

一般に n 次の多項式 $P(x)$ は $H_\ell(x)$ を用いて $P(x) = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell H_\ell(x)$ と展開できることに注意し、次の設問に答えよ。

(2) $H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$ となることを帰納法を用いて証明せよ。

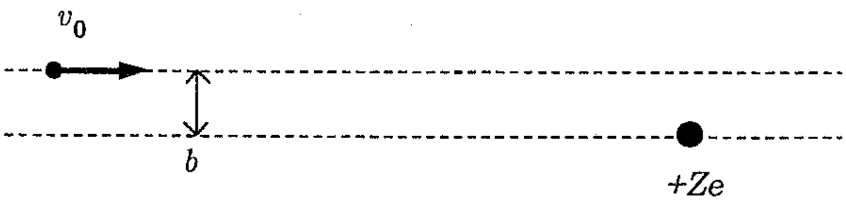
(3) a_n を適当な係数として $H_n(x)$ が次の形の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$
\begin{aligned}
xH_n(x) &= H_{n+1}(x) + a_n H_{n-1} \\
\frac{d}{dx}H_n(x) &= nH_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

物　理　学

[第1問]

電荷$+Ze$を持つ非常に重い原子核に向かって、質量m、電荷qの荷電粒子が初速度v_0を持って無限遠から衝突パラメータ(無限遠での粒子の運動方向を延長して得られる直線と標的(ここでは原子核)との距離) bで近づくとき、次の問いに答えよ。ただし、粒子間にはクーロン力のみが働くものとし、原子核の反跳は無視する。また、クーロンの法則の比例定数はkとせよ。



(1) 荷電粒子の描く軌道を、衝突パラメータbが大きい場合と小さい場合（ただし$b>0$）、およびqの符号が正と負の場合、計四つの組み合わせについて、同一の図の中に定性的に描け。

(2) 荷電粒子が持つ原子核の周りの角運動量$\boldsymbol{L}$を、原子核を原点とする荷電粒子の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$を用いて表わせ。

(3) $\boldsymbol{L}$が保存することを示せ。

(4) 衝突パラメータがbであるとき、$\boldsymbol{L}$の大きさを求めよ。

(5) 軌道上で荷電粒子が原子核に最も近づく点における粒子間の距離をsとするとき、この点における荷電粒子の速さv_sはどう表わされるか。

(6) $q=+e$とするとき、sを求めよ。

物　　理　　学

［ 第2問 ］

半径 a の球内に電荷が一様に分布している。球の外側には電荷はないものとする。球内の電荷分布を $\rho\,(>0)$ として，以下の問いに答えよ。

(1) 球の内外の電場の大きさ $E(r)$ を，球の中心からの距離 r の関数として求め，そのグラフを描け。

(2) 同じく球の内外の静電ポテンシャル $\phi(r)$ を r の関数として求め，そのグラフを描け。ただし，無限遠での静電ポテンシャルを 0 とすること。

(3) 無限遠から少しずつ電荷を持ってきてこのような電荷分布をつくるのに要する仕事 W_1 を計算せよ。

(4) 球内および球外の空間の静電場のエネルギーをそれぞれ計算し，全空間の静電場のエネルギー W_2 を求めよ。

[第3問]

媒質中を伝播する音は、媒質の密度の波である。$\Delta\rho$ を平均密度 ρ からのずれとすると、x 方向に伝播する音波は、波動方程式

$$k\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2}$$

に従う。ここで k は、断熱過程での ρ に対する圧力 P の変化率

$$k=\left.\frac{dP}{d\rho}\right|_{\text{断熱過程}}$$

である。

媒質が、温度 T の理想気体である場合について、以下の問いに答えよ。ただし、理想気体の分子量を M、定積比熱に対する定圧比熱の比を γ、気体定数を R とする。

(1) 理想気体の圧力 Pが、$P=\rho RT/M$ と表されることを示せ。

(2) k を、M、γ、T および R を用いて表せ。ただし、断熱過程では、$P/\rho^\gamma=$一定であることを用いてよい。

(3) ヘリウムガス（M=4.0、γ=5/3）中の音速は、同じ温度の窒素ガス（M=28.0、γ=7/5）中の音速の何倍になるか、有効数字2桁で答えよ。

(4) 理想気体中に、片端を閉じ他端を開いた長さ ℓ の管をおく。管の中の気柱にたつ音の基本定在波の振動数ν_0 を、音速を v として、求めよ。それに基づいて、ヘリウムガス中と窒素ガス中での ν_0 の違いを簡潔に説明せよ。

(5) 同じ温度のヘリウムガスと窒素ガスが、図のように薄膜で隔てられているとき、ヘリウムガス中から斜めに入射した音波はどのように進むか、図示し簡潔に説明せよ。