

平成13年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成12年8月29日(火) 13時00分～17時30分

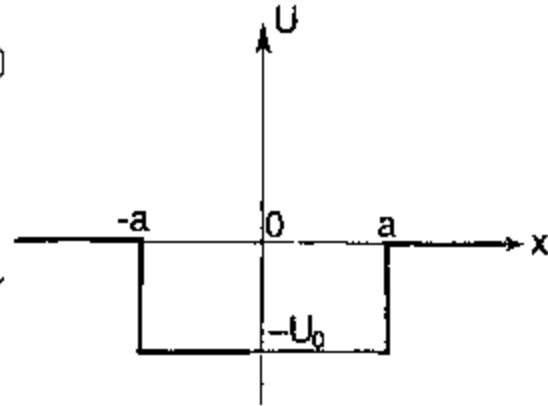
【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用すること。
3. 問題は全部で9問ある。9問からから**5問を選んで**解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計5枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に**科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号**を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

[問題 1]

図のような 1 次元の井戸型ポテンシャル $U(x)$

$$U(x) = \begin{cases} -U_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$



の中での質量 m の粒子の束縛状態 (エネルギー $E < 0$) を考える。

- まず、量子力学の不確定性関係を使ってこの問題を考える。
 - 粒子がポテンシャル U に束縛されていることから、直感的には粒子の位置の不確定性 Δx は a 程度だと考えられる。そこで、 $\Delta x = a$ として粒子の運動量の不確定性 Δp を求めよ。
 - 運動量の大きさ p は Δp より大きいと考えて、(a) の結果から粒子の束縛状態が存在するためのポテンシャルの深さ U_0 にどのような条件が必要と思われるか。
- 実は上で求めた束縛状態が存在する条件は正しくなく、どんなに浅いポテンシャルに対しても束縛状態が存在する。
 - シュレディンガー方程式を使って束縛状態 ($E < 0$) の波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。その際、エネルギー E と U_0, a, m の関係式を導け。(波動関数の規格化は考えなくてよい。)
 - 1(b) の結果に反してどのような U_0 の値に対しても束縛状態が存在することを示せ。
 - $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ のときに b を求めよ。
 - (c) の場合に粒子がポテンシャル井戸の外側にいる確率 $P(|x| > a)$ と内側にいる確率 $P(|x| < a)$ の比 $R = P(|x| > a)/P(|x| < a)$ を求めよ。また、これから 1(b) の考え方が正しくなかった理由を述べよ。

[問題2]

スピンが一次元格子上的の各点にあり、格子点の数が N (N は偶数) の模型を考察する。そのハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1},$$

とする。ここで周期的境界条件を課し、 σ_{N+1} は σ_1 を意味するものとし、かつ σ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は ± 1 の値をとるものとする。この模型の各状態は ($\uparrow\downarrow\uparrow \dots$) のようなスピンの配置によってあらわされる。

1. この模型の状態数は全部でいくつか。
2. J が正の場合と負の場合について基底状態のスピン配置を書け。
3. 前問の場合、基底状態エネルギーとその縮重度を求めよ。

以下では J が正の場合のみを考える。

4. 第一励起状態のスピン配置を書け。そのエネルギーと縮重度を求めよ。
5. すべてのエネルギー固有値とその縮重度を求めよ。ただし二項係数

$${}_N C_M \equiv \frac{N!}{M!(N-M)!},$$

を用いよ。

6. 前問の結果を用いて、この系の分配関数を求めよ。ただし温度は T とし、ボルツマン定数は k_B とする。必要に応じて

$$(1+x)^N = \sum_{M=0}^N {}_N C_M x^M,$$

を使ってよい。

7. N が無限大の極限での 1 格子点当たりの自由エネルギーが

$$-k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

であらわされることを示せ。

8. 前問の結果を用いて、1 格子点当たりのエネルギーとエントロピーを求めよ。高温でのエントロピーの漸近的振る舞いを求めよ。

[問題 3]

時間・空間座標に依存する電荷分布 $\rho(\mathbf{r}', t')$ と電流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ がある。これらによって誘起される電磁ポテンシャルは、ローレンツ条件のもとで、次のように表せる。(以下、MKSA 有理単位系を用いる。)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (1)$$

ϵ_0 と μ_0 は、それぞれ真空の誘電率と透磁率で、光速は $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ と書ける。また、 t' は、 $t, \mathbf{r}, \mathbf{r}', c$ で決まる量であり、次の設問で考察する。

1. 電磁波が伝わる時の遅延効果を考慮して、(1) 式の t' を決定せよ。
2. 電荷 e を持つ点粒子の運動を考え、その位置座標を $\mathbf{x}(t)$ とする。このとき、 $\rho(\mathbf{r}', t')$ と $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ をディラックのデルタ関数を用いて表せ。
3. この点粒子がつくる遠方 ($|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \gg |\mathbf{x}|$) での電磁ポテンシャルは、点粒子の速度 \mathbf{v} が光速に比べて十分小さい場合には、(1) 式の $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を $1/r$ で近似して求める事ができる。この電磁ポテンシャルが、 v/c の一次までの近似で、以下のように表せる事を示せ。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(t_0)}{c} \right), \quad c\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{v}(t_0)}{c}. \quad (2)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, $t_0 = t - r/c$ である。

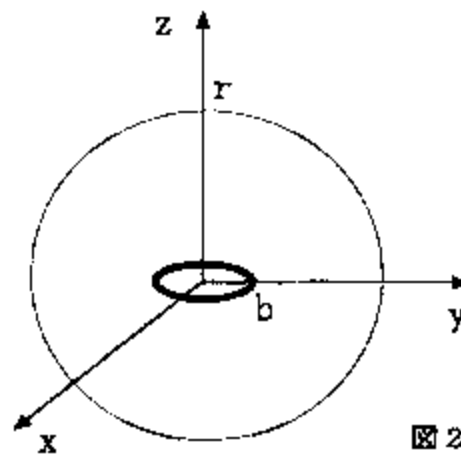
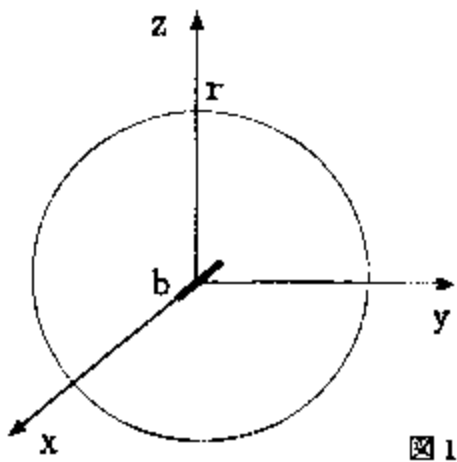
4. 前問の結果から、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}$ の遠方での主要項 ($1/r$ に比例する項) が、点粒子の加速度 \mathbf{a} を用いて以下のように表せる事を示せ。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0)), \quad c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0). \quad (3)$$

ここで、ベクトル積の公式 $\mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}) = \mathbf{Y}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}) - \mathbf{Z}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$ を使ってよい。

5. (3) 式を用いて以下の設問に答えよ。

- (a) 点粒子が、図1のように、一定の振幅 b と一定の振動数で x 軸上を単振動しているとする。このとき、原点から距離 r だけ離れた球面上($r \gg b$ とする)で、点粒子の運動の一周期あたりに、電磁波の強度が最大となる場所はどこか？理由を付けて答えよ。
- (b) 点粒子が、図2のように、一定の半径 b と一定の角振動数で xy 平面上を回転運動しているとする。このとき、原点から距離 r だけ離れた球面上($r \gg b$ とする)で、点粒子の運動の一周期あたりに、電磁波の強度が最大となる場所はどこか？理由を付けて答えよ。



[問題 4]

ロケットの等加速度運動を相対論的に考察する。以下では一次元的な運動のみを考え、静止した観測者の系で時刻 t におけるロケットの座標を $x(t)$ と書く。

1. ロケットに固定された時計が示す時間を固有時間 τ と呼ぶ。観測系における時刻 t_1 から t_2 の間の固有時間の経過は光速を c として

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2}$$

で与えられることを、ローレンツ変換を用いて示せ。ここでローレンツ変換とは、ある座標系 (t, x) とそれに対して x 軸方向に速度 v で運動している座標系 (t', x') の間では次のように定義される、

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x \\ x' &= -\frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x \end{aligned}$$

2. 相対論的な速度ベクトルおよび加速度ベクトルは $(u^\mu) = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau})$, $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$, $(\mu = 0, 1)$ で記述される。このとき常に

$$u^\mu u_\mu = c^2, \quad u^\mu a_\mu = 0 \tag{1}$$

が成立することを示せ。ただし $u^\mu v_\mu \equiv u^0 v^0 - u^1 v^1$

3. 以下ではロケットの等加速度運動、すなわち運動する物体の静止系において正方向に定数 $g (> 0)$ で加速されている状況を考察する。このときロケットの加速度ベクトルが $a^\mu a_\mu = -g^2$ をみたすことを示せ。またそれと (1) を用いて u^μ に対する次の運動方程式を導け。

$$\frac{du^0(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^1(\tau) \quad \frac{du^1(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^0(\tau) \tag{2}$$

4. 初期条件 $\tau = 0$ で $t = x = \frac{dx}{d\tau} = 0$ という初期条件のもとに運動方程式 (2) を解き、 t, x をロケットの固有時間 τ の関数として求めよ。
5. これから例えば g を地表の重力加速度 ($\approx 10\text{m/秒}^2$) とした場合、地球から銀河の中心まで行くのに (距離約 3 万光年) ロケットの固有時間はどれくらい経過するか。有効数字一桁で答えよ。ただし $\ln(10) \approx 2.3$, 1 年 $\approx 3.1 \times 10^7$ 秒を用いて良い。
6. 地球からこのロケットを観測するため、信号を光速で送りそれがロケットで反射して返ってくるまでの時間を計測する。時刻 t に送った信号が返ってくるまでの時間間隔を求めよ。特にこの観測が不能になるのはどのような場合か理由とともに考察せよ。

[問題 5]

雲母薄膜は、図 1 に示すように、厚さが一定の段差 Δd からなるステップ構造をしており、その厚さ d_j は場所により異なり、次式で与えられる。

$$d_j = d_0 + j\Delta d \quad \text{ただし } j: \text{整数}$$

この薄膜を光の反射率の高い基板上に張り付けて上方から見ると、上記の異なった厚さ d_j のステップ毎に、異なった波長 λ_j の色が見える。

1. この様に見える理由を述べ、 λ_j と d_j 、および雲母の屈折率 n との関係を示せ。ただし、 n の波長依存性は無視する。

さて、可視光を用いてこのステップの高さを測定するデバイスを考案した。その準備として、まず複屈折について復習する。

水晶のような、光学的に異方な（複屈折性をもつ）透明光学媒質中を光が伝搬すると、互いに直交した偏光面と異なった屈折率 n_1 、 n_2 を持つ光（正常光と異常光）とに分かれる。これらの偏光方向をそれぞれ x 軸、 y 軸とし、単色平面波長の伝搬方向を z 軸とする。水晶に入射する直線偏光した波長 λ の単色光電場 E の偏光方向と x 軸とのなす角を 45° とする。水晶に入射後の x 軸、 y 軸方向の電場成分は、次式で表される。

$$E_x = A \cos(k_1 z - \omega t) / \sqrt{2}, E_y = A \cos(k_2 z - \omega t) / \sqrt{2},$$

$$k_1 = 2\pi n_1 / \lambda, k_2 = 2\pi n_2 / \lambda.$$

ただし、入射位置を $z=0$ とする。光の伝搬する方向の結晶の厚さが x に依存し、 $D(x)$ で与えられるとし、出射位置における、 x 、 y 二つの偏光方向の電場を次のように表す。

$$E_x = A \cos(k_1 D - \omega t) / \sqrt{2} = A \cos(\Phi(D, t)) / \sqrt{2},$$

$$E_y = A \cos(k_2 D - \omega t) / \sqrt{2} = A \cos(\Phi(D, t) + \delta(D)) / \sqrt{2}$$

2. この時、位相差 $\delta(D)$ を屈折率の異方性 $\Delta n = n_2 - n_1$ 、 λ 、 D 等を用いて表せ。

デバイスの構造を、図 2 に示す。 x 軸に対して、 $+45$ 度方向（図 2 の P_A 方向）の偏光成分のみを透過する偏光板 A が配置されている。その右側に、厚さが $D(x)$ のくさび形の水晶板、その更に右に、もう一枚の検光板 B を、 -45 度方向（図 2 の P_B 方向）の偏光成分のみを通す様に各々配置する。くさび形の頂角は充分小さいので、入射面に垂直に z 軸方向に入射した単色光は、水晶への入射・出射に際して屈折しないものとする。

3. この時の検光板 B を透過してきた光電場 E_B を求めよ。それを用いて、光の強度 I を位相差 $\delta(D)$ の関数として求めよ。
4. 位相差 $\delta(D)$ がどのような値の場合に、透過光強度が最大になるか。

頂角 $\theta = 0.1 \text{ mrad}$ のくさび形の水晶と偏光板、検光板及び検光板に密着した細いスリットを用いて、図 3 に示す様なデバイスを作った。それに白色光を垂直に入射した。ここで、水晶の Δn の波長依存性を無視できるとする。

5. スリットの位置を x 軸方向に動かすと、通ってくる光の波長が変わる。その理由を説明せよ。

ヒトの眼は可視光領域では数 nm のスペクトル差を容易に検出できる。雲母薄片に白色光を垂直入射し、その反射光が、デバイスに垂直入射した白色光の透過光と同じ色になるように、デバイスのスリット位置を動かす。この時の移動量は常に、 2.5mm の整数倍であった。

6. 雲母の二種類の色に対応する様にして決めたスリットの二カ所の位置の水晶の厚さの差は、やはりある一定値 ΔD の整数倍である。 ΔD の値を求めよ。

7. 単位ステップ高さ Δd と ΔD との関係性を求めよ。

8. 雲母の屈折率 $n=1.5$ 、水晶の屈折率の異方性 $\Delta n=0.009$ を用いて、雲母薄片のステップ構造の最小単位ステップの高さ Δd を求めよ。

図1

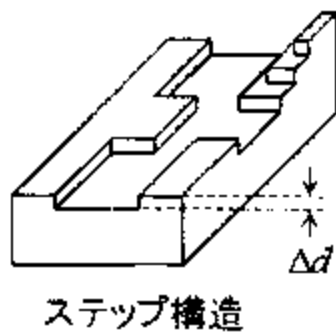


図3

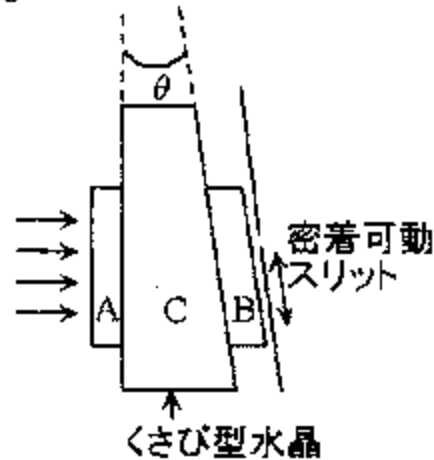
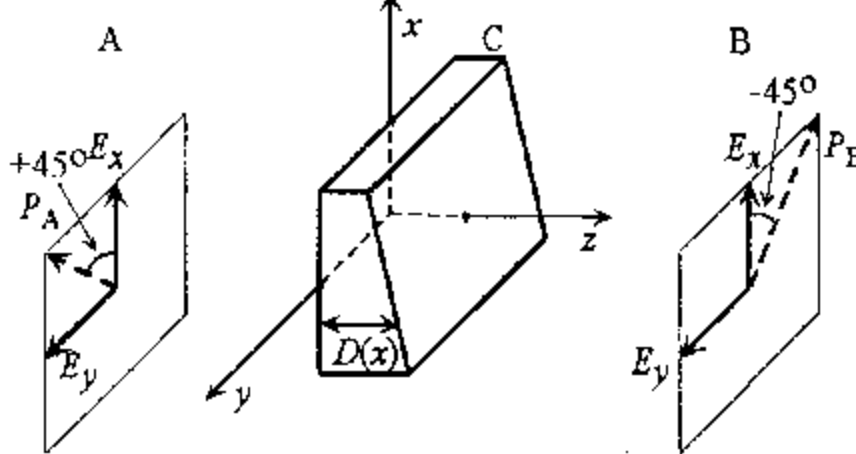


図2



[問題 6]

1. ある半導体試料のホール係数の温度依存性を測定したところ、図1のようにA、B、Cの3つの温度域でそれぞれ特徴的なふるまいが見られた。これに関して以下の問いに答えよ。数値で解答する場合の有効数字は2桁でよい。

ただし、この半導体の伝導帯の底は等方的で単一の極小をもつ単純な構造を持つものとする。また、この試料には単一種類のドナー（電子供与体）のみが含まれ、アクセプター（電子受容体）は無いものとする。必要ならば次の数値を参考にせよ。

素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$ 、自然対数 $\ln 10 = \log_e 10 = 2.30$

- (a) 室温(300K)におけるキャリアー密度（電子密度）を求めよ。
- (b) 前問で求めたキャリアー密度の値は、そのまま、この試料に含まれるドナー不純物の濃度を与えることになる。その理由を説明せよ。
- (c) ドナー準位の束縛エネルギー E_D （伝導帯の底を基準とした値）を求めよ。
- (d) 前問で求めたエネルギーに相当する電磁波は次のどの波長領域に属するか、次のうちから選べ。

ラジオ波 / マイクロ波 / 赤外線 / 可視光 / 紫外線 / X線

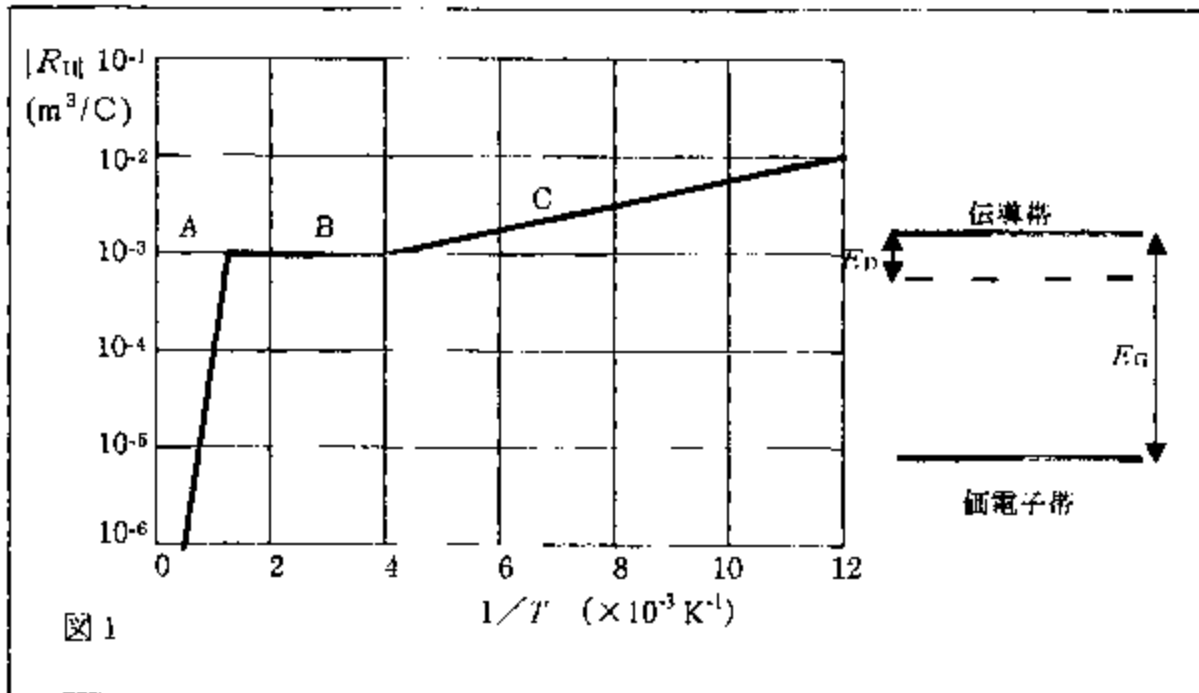


図1

(e) 半導体中のドナー束縛状態は、イオン化したドナー不純物 D^+ のクーロン場に電子が束縛されたものである。この束縛状態を水素原子モデルにならって考えてみよう。

水素原子の基底状態の束縛エネルギー E_0 は

$$E_0 = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{eV} \quad (\epsilon_0 \text{ は真空の誘電率、} m_0 \text{ は電子の質量)}$$

である。今の場合、水素原子モデルと異なる点は、①電子が真空中ではなく誘電率 ϵ の媒質中にあること、および、②結晶の周期ポテンシャルの効果によって電子の有効質量 m^* が自由電子のそれとは異なること、の二点である。これらのことを考慮して、ドナー束縛エネルギー E_D を E_0 、 m^*/m_0 、 ϵ/ϵ_0 によって表せ。

(f) $\epsilon/\epsilon_0 = 10$ であるとして、この半導体中のドナー束縛状態について、水素原子のボーア半径に対応する長さを求めよ。その長さを、結晶の原子間距離およびドナー不純物原子間の平均距離と比較することにより、上記の水素原子モデルによる近似が正当化されることを示せ。

2. ある物質を短冊型に切り出した試料に図2のように電極を付け、端子①-②間定電流電源をつなぎ、端子①-②間および端子③-④間にそれぞれ高入力インピーダンスの電圧計をつないで測定を行なった。

図中に示した各部の寸法は $L = 5\text{mm}$ 、 $l = 3\text{mm}$ 、 $w = 1\text{mm}$ 、 $d = 0.1\text{mm}$ である。

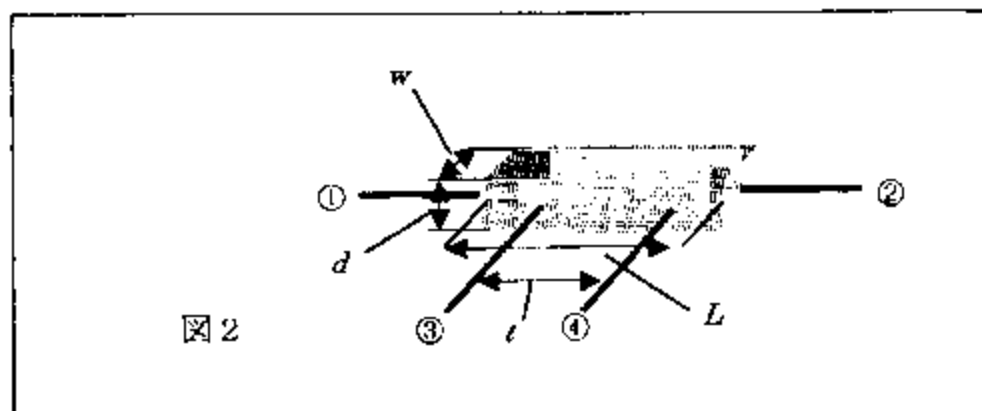


図2

- (a) 端子①-②間に一定電流 $I = 0.1\text{mA}$ を流したところ、端子①-②間には $V_{1-2} = 90.0\text{mV}$ 、端子③-④間には $V_{3-4} = 24.0\text{mV}$ の電圧が発生した。この物質の電気抵抗率 ρ を計算せよ。
- (b) 電気抵抗率の測定では、このように試料に4本の電極を付けて、電流端子と電圧端子を別々にすることがしばしば行われる。何のために、そのようにするのかを説明せよ。
- (c) 実際の測定では、電流を $I = +0.1\text{mA}$ としたとき $V_{3-4} = +24.8\text{mV}$ で、 $I = -0.1\text{mA}$ としたときは $V_{3-4} = -23.2\text{mV}$ であった (問(a)で用いた $V_{3-4} = 24.0\text{mV}$ はそれらの平均をとったものである)。このように、電流を反転したときに電圧の大きさが同じにならない原因として、どのような物理的現象が考えられるか。

[問題7]

図1のようなセットアップで、地上において宇宙線を測定する実験を行った。カウンターBとCの間には鉛の板が積めるようになっている。

1. カウンターA~Dでは荷電粒子が通過したことを測定する。荷電粒子の通過を測定する装置としては、一般にどのようなものがあるか。一つ選んでその原理を簡単に説明せよ。

2. カウンターから出てくる信号を図2の回路によって計数した。

(a) ディスクリミネータは、入力信号があるレベル以上の場合に、一定の時間幅 τ を持つ矩形波を出力する装置である(図3)。このしきい値レベルを調整するとき注意すべき点を述べよ。

(b) コインシデンス(同時計数)回路は、2つの入力信号に時間的な重なりがある場合に出力パルスを出す。カウンターAからは毎秒 N_A カウント、カウンターBからは毎秒 N_B カウントの頻度で、コインシデンス回路に信号が入るものとする。それぞれの信号の幅を τ 秒とした時、AとBからの独立な信号が偶然重なってコインシデンス回路から出力が出る頻度はいくらか求めよ。(ただし、AとBの同時計数の頻度は N_A と N_B に比べてずっと少ないものとする。)また、図2の可変遅延器はなぜ必要か答えよ。

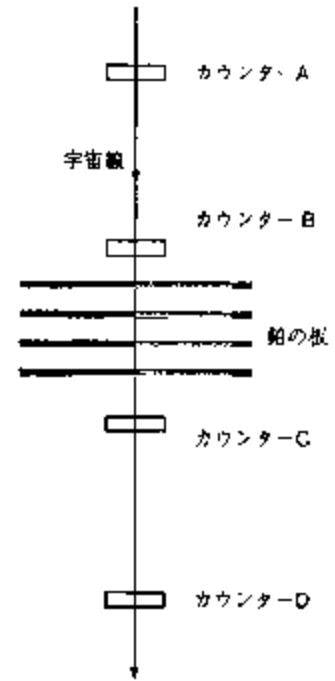


図1: 測定セットアップ

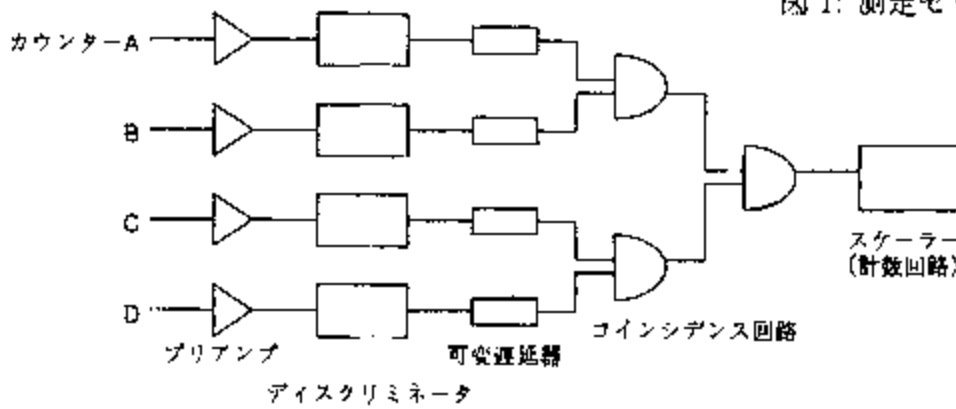


図2: 測定用回路ダイアグラム

(c) 偶然によるコインシデンス(同時計数)が多すぎると測定が困難になるが、その場合どのような対策を施したら良いか。

(d) カウンターや回路には、一度信号が来るとすぐには次の信号を受け付けない不感時間がある。この測定装置と回路全体の不感時間は T 秒であった。スケールで測定された計数を毎秒 S カウントとすると、真の計数はいくつか。

[次のページに続く]

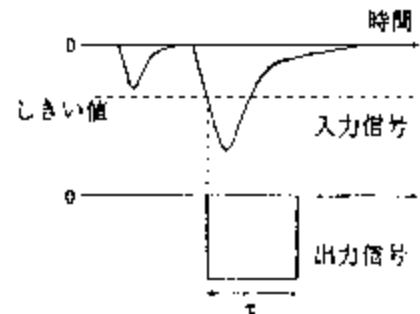


図3: ディスクリミネータの入出力信号

[問題7の続き]

(e) カウンターBとCの間の鉛の板の枚数を変えながらスケーラーのカウント数を記録すると、図4のようになった。図のx、yに対応する宇宙線粒子はそれぞれ以下にあげる粒子のうちどれか答えよ。また、それらの粒子は鉛の中でどういう過程でエネルギーを失うのか説明せよ。

- (I) 電子、(II) ニュートリノ、
- (III) ミュー粒子 (ミューオン)

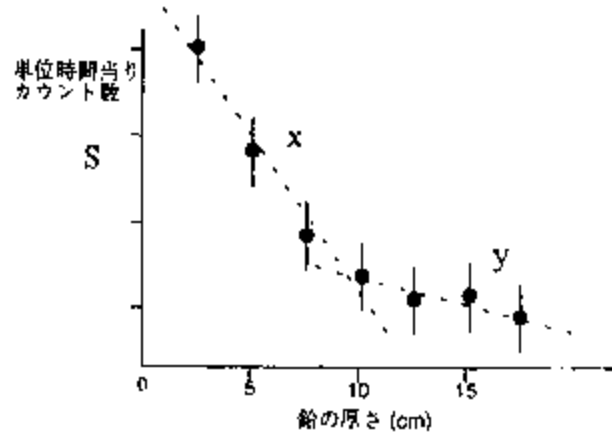


図4: 測定結果

3. 宇宙線に含まれるミュー粒子を鉛の板で止めてその寿命を測りたい。ミュー粒子は、およそ2マイクロ秒で電子とニュートリノ2つに崩壊する。

(a) 300MeV/cの運動量を持つミュー粒子を止めるのに必要な鉛の厚さを図5より求めよ。ここで、 R は飛程(荷電粒子を止めるのに要する物質質量(g/cm^2))、 M は粒子の質量、 β は粒子速度を光速度で割ったもの、また $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。ただし、ミュー粒子の質量は $106\text{MeV}/c^2$ 、鉛の密度は $11.35\text{g}/\text{cm}^3$ である。

(b) 前問で求めた厚さの鉛の板をカウンターBとCの間に置いた。カウンターA、B、Cを使ってミュー粒子の寿命を測るにはどのようにしたら良いか。図2のようなダイアグラムを書いて説明せよ。この測定では実験誤差としてどのようなものが重要か考察せよ。また、カウンターDを使わない理由を書け。

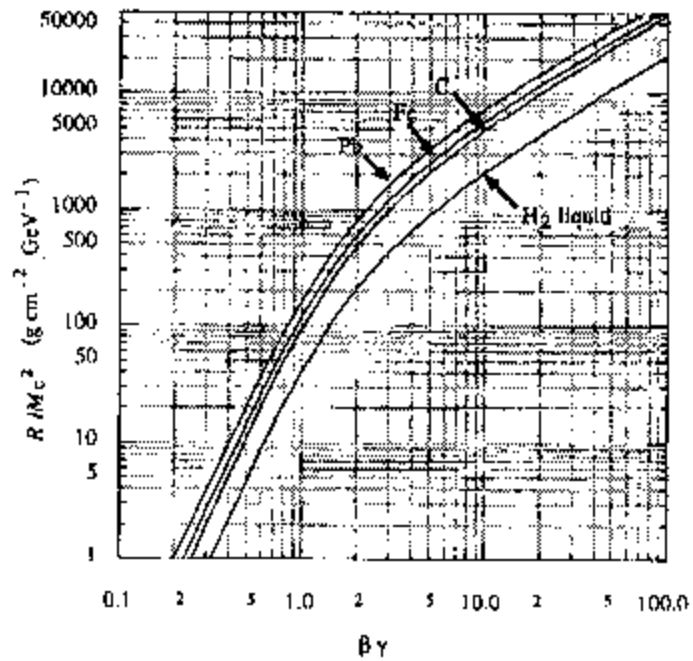
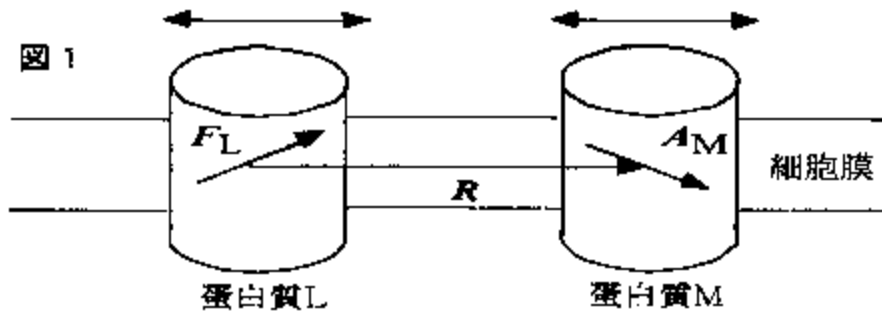


図5: 荷電粒子の飛程

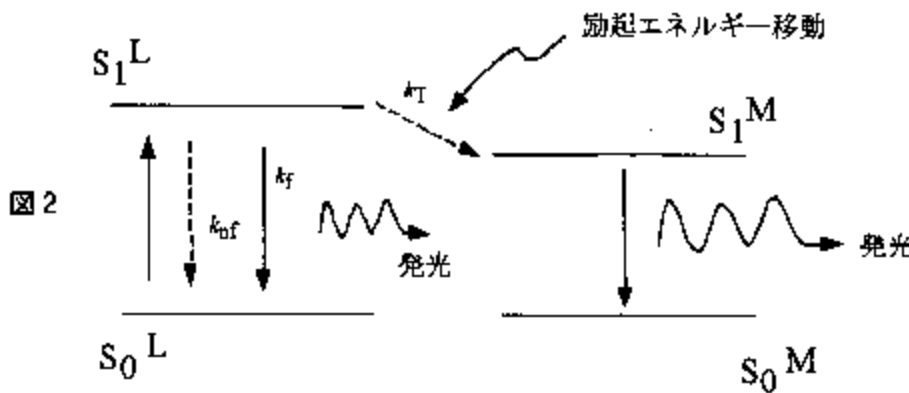
[問題 8]

図1のように、細胞の膜上にある円筒型蛋白質が並進拡散している。蛋白質が衝突したときに安定な複合体を作ったかどうかを判定するために、蛋白質間の励起エネルギー移動を測定する方法について、以下の問いに答えよ。



1. 蛋白質に結合させた発光体は、基底状態 S_0 と第一励起状態 S_1 を持ち、可視光で励起されるとする。図2のように2つの異なる蛋白質 L, M 内に存在する発光体の電子状態を (S_0^L, S_1^L) , (S_0^M, S_1^M) とする。可視光により蛋白質 L の電子が S_0^L から S_1^L に励起された。 S_1^L は S_1^M よりごくわずかにエネルギー準位が高いとする。発光体が励起状態 S_1 から基底状態 S_0 に遷移するとき、発光を伴う速度定数を k_f 、無輻射的に遷移するときの速度定数を k_{nr} とする。ただし速度定数は単位時間当たり吸収・発光する発光体の割合である。

(a) 蛋白質 L の発光体を $t=0$ で励起したとき、時間 t で励起状態にある発光体の数 $N(t)$ を k_f , k_{nr} を用いて表せ。また時間 t での発光強度 $F(t)$ を表せ。



2. 蛋白質 L 内の発光体の励起された電子のエネルギーが S_1^L から S_1^M に移動することを、励起エネルギー移動という。この時、蛋白質間の励起エネルギー移動は発光遷移双極子モーメント F と吸収遷移双極子モーメント A の双極子相互作用で起こる。励起エネルギー移動の速度定数 k_T は $k_T = \alpha \cdot k_f \cdot J \cdot \kappa^2 / R^6$ と書ける。ここで κ^2 は配向因子と呼ばれ、 F や A の方向に依存する量である。蛋白質 L の発光遷移双極子モーメントは F_L 、蛋白質 M の吸収

次ページに続く

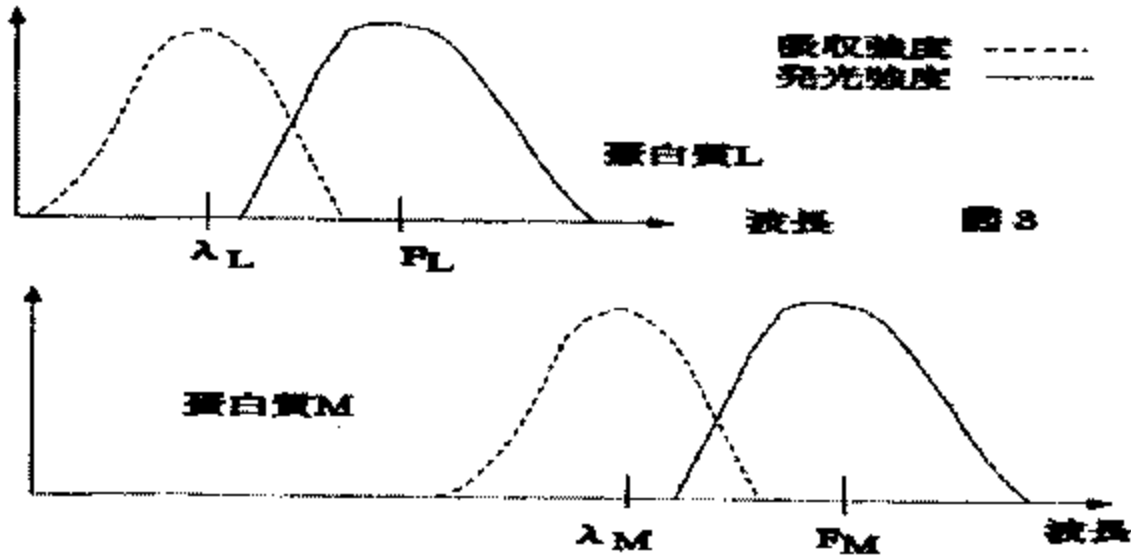
遷移双極子モーメントは A_M のように表す。 R は F_L と A_M 間の距離ベクトルであり、 J は蛋白質 L の発光スペクトルと蛋白質 M の吸収スペクトルの重なるの大きさである。 α は比例定数である。

(a) 励起エネルギー移動が無い時とある時の励起状態の蛋白質 L の発光体の寿命を τ と τ' とする。 $1/\tau$ 、 τ/τ' を上に定義した速度定数を用いて表せ。

(b) 励起エネルギー移動が起こり τ' が τ の $1/2$ になる距離を R_0 とするとき、 R_0 はどの様に書けるか、但し τ 、 τ' を使わずに書くこと。さらに τ/τ' を R_0 と R の関数として表すとどうなるか。

(c) 配向因子 κ^2 は F_L と A_M の相対角度配置によって大きく変化するし、この相対配置を試料溶液中の蛋白質で決定するのは一般に大変困難である。従って τ'/τ の値の観測だけでは、蛋白質 L と M の距離 R の変化を決定することは出来ない。ところが、発光体が蛋白質内で3次元方向に全く自由に速く運動しているときは、 κ^2 の値は $2/3$ であり、この時は蛋白質 L と M の距離を計算することが出来る。 $\kappa^2=2/3$ の場合、蛋白質 L と M が複合体を作った場合と、複合体を作らずお互い離れて2次元膜上を運動している時と比べる。蛋白質 L の τ'/τ は R/R_0 の変化に対してどの様に変化するか、定性的に図示し、縦軸と横軸に特徴的な値を記入せよ。ただしこの時、蛋白質 L と M の直径は同じ $R_0/2$ であるとし、発光体の中心は円筒型蛋白質の中心と一致するとする。

3. 蛋白質 L と M が単独で存在する場合の吸収スペクトルと発光スペクトルを図3に示す。L と M の吸収強度の最大値の波長を各々 λ_L と λ_M とし、発光強度の最大値の波長を F_L と F_M とし、 $\lambda_L < F_L < \lambda_M < F_M$ とする。ここで注意すべきは、現実の蛋白質は複雑な構造を持っているので、L と M の吸収・発光は種々の要因により図3のように幅の広いスペクトルを持つ。発光スペクトルを測定することで、実験的に蛋白質 L と M の間に、励起エネルギー移動が起こったか、そうでないかを判定できる。どの波長で励起し、どの発光スペクトル測定を行えば判定できるか。図3にならって図示して解答せよ。



[問題 9]

水素原子の衝突によるバラ水素分子 ($p\text{-H}_2$) からオルト水素分子 ($o\text{-H}_2$) への化学反応 (水素原子間の結合の組替え) に関連して、以下の設問に答えよ。

1. まず、水素分子をボルン・オッペンハイマーの断熱近似で考えよう。2つの陽子がそれぞれ \mathbf{R}_1 と \mathbf{R}_2 の位置に固定されているときの2電子系の基底状態エネルギー (断熱ポテンシャル) を $U_2(|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|)$ と書こう。これは $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = R_0 \equiv 1.40a_B$ (a_B はボーア半径) で最小となる。陽子の運動を考える際には、この $U_2(|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|)$ が陽子間相互作用ポテンシャルを与えることになる。なお、陽子の質量 M は電子の質量 m の1840倍である。
 - (a) 2つの陽子の運動は重心運動と相対運動に分離できるが、このうち、相対運動に関するシュレディンガー方程式を $U_2(|\mathbf{R}|)$ を使って書き下せ。ただし、 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ である。
 - (b) この方程式の角度成分に注目し、相対距離 $|\mathbf{R}|$ は R_0 と近似して、2陽子系の回転運動のエネルギー固有値 E_L を M や R_0 を使って表せ。ここで、 $L = 0, 1, 2, \dots$ である。さらに、 $\hbar^2/ma_B^2 = 27.2\text{eV} = 3.2 \times 10^5\text{K}$ であることを使って、 $E_1 - E_0$ の値を K の単位で求めよ。
 - (c) 陽子は核スピンの $\frac{1}{2}$ であるが、 $p\text{-H}_2$ とは2つの陽子の核スピンの反平行なもの (合成核スピンのゼロ)、 $o\text{-H}_2$ とはそれが平行のものである。それぞれの分子について、許される L の状態とその縮重度を述べよ。
 - (d) 合成核スピンのゼロの基底状態にある水素分子と重水素分子 D_2 について解離エネルギーを測ったところ、それぞれ、4.46eV と 4.54eV であることが分かった。これから、水素分子のゼロ点振動エネルギーの大きさを具体的に求めよ。なお、重水素の原子核は質量が $2M$ で、核スピンは1である。
2. 次に、 $\text{H} + \text{H}_2$ 系を考えよう。この場合の断熱ポテンシャルは核スピンの影響を無視し、図1(a)で定義された3つの変数、 R_a 、 R_b 、及び、 θ の関数となる。図1(b)-(d)には、その断熱エネルギー $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の代表的な θ の値における様子が等高線の形で表示されている。なお、各等高線の値は最小値 (図中の黒丸で示した点における $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の値で、これはあまり θ にはよらない。) から測ったエネルギーの増加分 (eV の単位) である。この図を参考にしながら、次の各問に答えよ。
 - (a) $U_3(R_a, R_b, \theta)$ を最小にする $\{R_a, R_b\}$ の組のうち、小さい方は R_0 と等しいので、 $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の最小値は自由な水素原子のエネルギーと $U_2(R_0)$ の和にほぼ等しいことが分かる。しかしながら、より詳しく見ると、実際の最小値はその和よりも約 2meV ほど低くなっている。この余分の引力エネルギーが何に由来するかを述べよ。

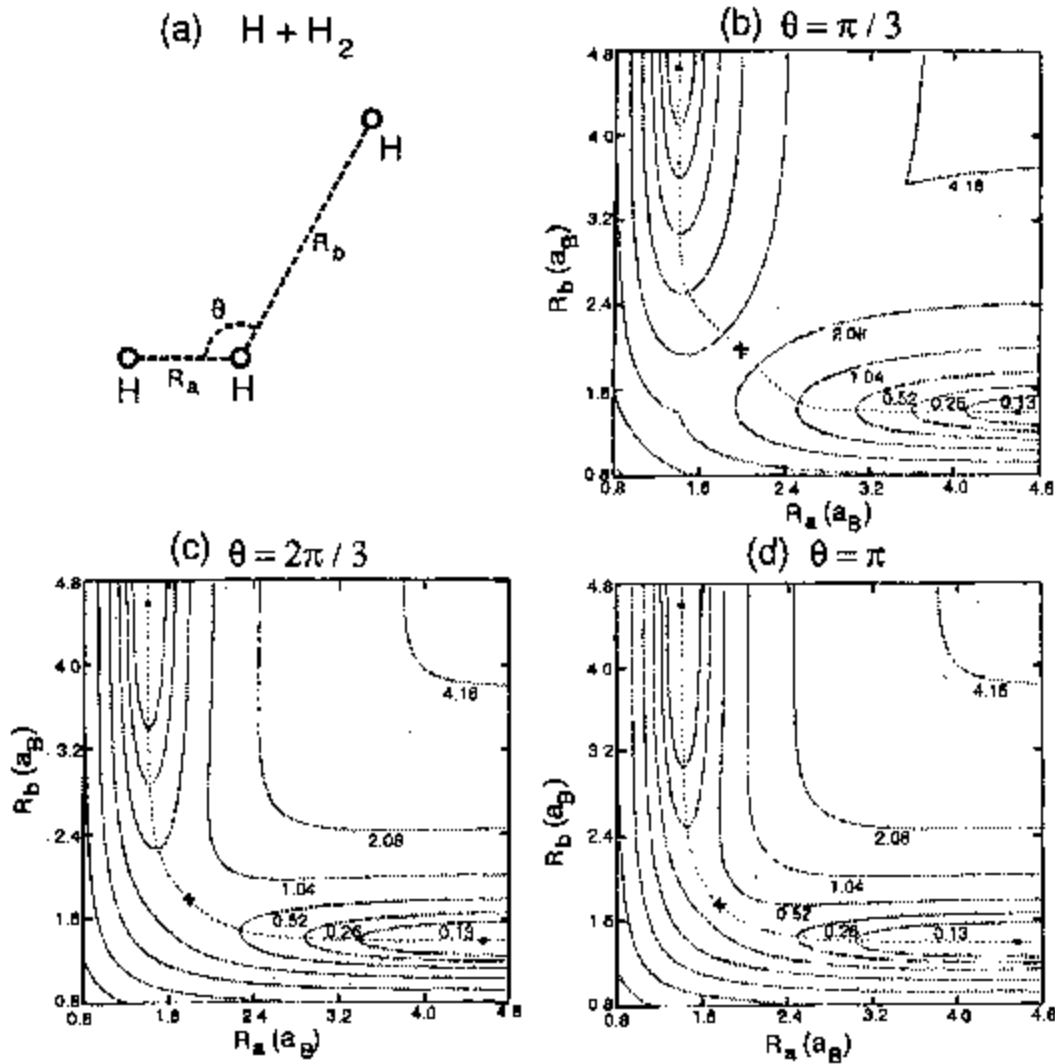


図 1: $H + H_2$ 系における断熱ポテンシャル。

- (b) R_a と R_b がともに無限大となる時、 $U_3(R_a, R_b, \theta)$ は θ によらずに、ある一定値に近づく。その一定値の具体的な値を求めよ。
- (c) 図 1 (b)-(d) で、黒丸の点と十字印の点を貫く点線経路に沿ったエネルギー変化の様子を参考にして、ビーム状の水素原子を打ち込んで基底状態にあるパラ水素分子と衝突させることによって得られるオルト水素分子が最もよく検出されるのは、元のビームの方向から見てどの角度であるか、推論せよ。
- (d) この化学反応を気相中 300K で行くと、270K で行った場合よりも 3.6 倍の収量の増加が見られた。このことから、この反応に関連した活性化エネルギー E_a を eV の単位で求めよ。ただし、 $\ln 3.6 = 1.3$ である。得られた E_a と図 1 (b)-(d) の十字印で示された点におけるエネルギーの値との関係を議論せよ。