平　成　9　年　度　入　学　試　験　問　題

数　　学

〔注意事項〕

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3．問題は全部で3問ある。3問のすべてに解答せよ。
4．答案用紙は、各問につき1枚、合計3枚配付してあるから、確実に配付されていることを確かめること。
5．各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。
6．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10．答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後の頁にある）。

数　学 (平成8年8月)

次の3問の全部について解答せよ。解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使うこと。

[第1問] 実変数 x, y, z に関する2次形式

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - \sqrt{6}xy + \sqrt{6}yz \tag{1}$$

について、以下の設問に答えよ。

(a) ベクトル $\vec{r}$ を $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とし、$f(x, y, z) = \vec{r}^T A \vec{r}$ と表した時、対称行列 A の固有値と単位固有ベクトル (第2成分は非負) を求めよ。ここでは $\vec{r}^T$ は $\vec{r}$ の転置を表す。

(b) 上で求めた A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3)$ に対応する単位固有ベクトル $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ を並べて3行3列の行列 $P = (\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ を作る。 P による座標変換

$$\vec{r} = P\vec{r'}, \quad \vec{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{2}$$

を行った場合、$f(x, y, z)$ がどのような形に変換されるかを求めよ。また、P によって変換されるベクトルはその大きさを変えないことを示せ。

(c) P による変換をある軸のまわりの回転とみなした時、この回転軸の方向ベクトルを求めよ。

(d) $P^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし E は3次の単位行列である。

[第２問] ２次元 (x, y) 平面の上半面 $(-\infty < x < \infty,\ y > 0)$ における、なめらかな曲線を考える。 曲線は、実数パラメータ s によって $(x(s), y(s))$ と表され、次の微分方程式を満たすものとする。

$$\left.\begin{aligned} y\,x'' - 2x'\,y' &= 0 \\ y\,y'' + x'^2 - y'^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ただし、関数 $x(s)$ は２階微分可能で、$x' = dx/ds$, $x'' = d^2x/ds^2$ および $x'^2 = (dx/ds)^2$ である。関数 $y(s)$ についても同様である。以下の設問に答えよ。

(a) 新しい変数

$$X = \frac{x'}{y}\ , \qquad Y = \frac{y'}{y} \tag{2}$$

を導入して、変数 $X(s)$ と $Y(s)$ の満たすべき方程式を求めよ。さらに、次の関係

$$X^2 + Y^2 = C \tag{3}$$

が成り立つことを示せ。 ただし、C は定数である。

(b) 方程式 (1) を満たす $(x(s), y(s))$ はどのような曲線群を表すか。$X = 0$ と $X \neq 0$ の場合に分けて、それぞれについて求めよ。ただし、$C = 1$ としてよい。

[第３問]

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

を満たす正の整数 x, y, z の組み合わせをすべて求める方法を考える。ここで x, y, z のどの２つも、たがいに素 (最大公約数が１) とする。

(a) x と y は、一方が偶数、もう一方が奇数であることを証明せよ。

(b) 以下では、偶数の方を x とする。残りの y と z の２数から、$A = (z+y)/2$, $B = (z-y)/2$ と定義するとき、A と B は整数であり、かつ、たがいに素であることを証明せよ。

(c) 一般に、たがいに素な正の整数 A と B の積が正の整数 C の２乗、すなわち

$$A \cdot B = C^2 \tag{2}$$

で表せる場合、$A = \alpha^2$, $B = \beta^2$ となる整数 α, β が存在することを証明せよ。

(d) (1) 式を満たす３つの整数 x, y, z を、２つの整数 α, β (ここで $\alpha > \beta > 0$) から導く式を示せ。

(e) (d) の結果を用いて、$\alpha \leq 6$ の範囲で、たがいに素なすべての x, y, z の組み合わせを示せ。

平 成 9 年 度 入 学 試 験 問 題

物 理 学

〔注意事項〕

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。

2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。

3．問題は全部で3問ある。3問のすべてに解答せよ。

4．答案用紙は、各問につき1枚、合計3枚配付してあるから、確実に配付されていることを確かめること。

5．各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。

6．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。

7．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。

8．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。

9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。

10．答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後の頁にある）。

物理学 (平成8年8月)

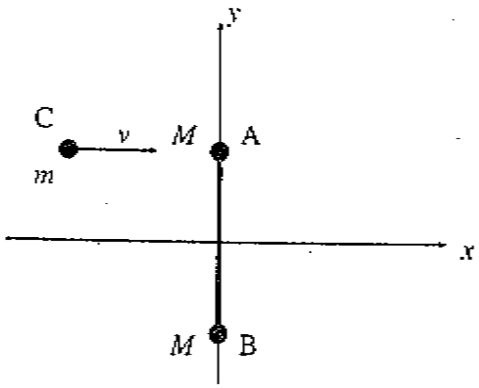
[第1問]

長さ $2a$ で質量の無視できる剛体の棒の両端に、ともに質量 M をもつ質点AおよびBが取り付けられ、図のように xy 平面内に静止している。そこに質量 m の質点Cが、図のように直線 $y=a$ に沿って、速度 v で x 軸の正の向きに等速直線運動して、質点Aと衝突した。衝突は完全弾性的であり、衝突後のCの運動は x 軸に平行であるとして、以下の設問に答えよ。ただし摩擦や重力は考えない。

(1) 衝突後の系(A、B、C)の運動を記述するのに適した複数個の物理量を定義し、それらがどのような力学的保存則により決定されるかを述べ、式で表わせ。

(2) 力学的保存則を解いて、上で定義した物理量を、M、m、a、および v で表わせ。

(3) 衝突後、質点AおよびBの速度の x 成分は、どのように時間変化するか。衝突後の経過時間 t の関数として、同一のグラフに図示せよ。特徴的な座標の値も記入すること。



[第 2 問]

電荷 q、 質量 m の荷電粒子 の位置ベクトル を $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で表わす。粒子の速度は光速度と比べて十分小さいとして以下の設問に答えよ。

(1) 一様な静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ がかかっているときの荷電粒子の運動で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $d\mathbf{r}/dt = (v_0, 0, u_0)$ を満たすものを求めよ。

(2) 上記静磁場と振動数 $\omega = qB/m$ をもつ電場 $\mathbf{E} = (E\cos\omega t, -E\sin\omega t, 0)$ がかかっているとき、運動方程式の解で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $d\mathbf{r}/dt = (0, 0, 0)$ を満たすものを求めよ。この場合、運動方程式は 複素変数 $dx/dt + i dy/dt$ を用いると扱いやすい。

(3) (2) について、運動エネルギー K の変化率 dK/dt を求めよ。 また、 電場 $\mathbf{E}$ と 粒子の速度 $\mathbf{v}$ の関係に注目して、この結果を説明せよ。

[第 3 問]

通常、気体は高温低密度の極限で理想気体に近づくが、一般には理想気体からのずれが観測される。このようなずれを示す気体 1 モルに対して、以下の設問に答えよ。

(1) この気体を体積 V に保って熱容量を測定したところ、温度 $T_1 < T_2$ の間で、$C = 2.5R - gT^{-2}$ と表されることがわかった。但し、R は気体定数であり、g は温度によらない定数である。この測定で、温度 T_1 から温度 T_2 まで気体の温度を上昇させたときの気体のエントロピーの増加量を求めよ。

(2) 熱膨張率 α と等温圧縮率 κ を測定したところ、次のような関数で表されることがわかった。

$$\alpha \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left(1 + \frac{a}{VT}\right), \qquad \text{(i)}$$

$$\kappa \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{b}{VT}\right). \qquad \text{(ii)}$$

但し、V、T、p はそれぞれ気体の体積、温度、圧力である。また、a、b は同じ次元を持つ定数である。V の 2 階偏導関数を考えることにより、$a = 2b$ であることを証明せよ。

(3) この気体の状態方程式を以下の順で求めよう。

(イ) 先ず (ii) 式のみを用いて、等温過程における、p と V の関係を求めよ。

(ロ) (イ) の結果を (i) 式に代入して、状態方程式を決定せよ。