

平成19年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成18年8月29日（火） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第1問

量子論における軌道角運動量 \mathbf{l} は古典論と同様に座標 \mathbf{r} と運動量 \mathbf{p} のベクトル積で与えられる。すなわち $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ である。ここで、それぞれのベクトルの成分は $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$ である。以下の設問に答えよ。ただし、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) を用いよ。

1. l_z と x, y, z との間の交換関係を求めよ。
2. l_z と p_x, p_y, p_z との間の交換関係を求めよ。
3. l_a と l_b との間の交換関係を求めよ。ただし、 $a, b = x, y, z$ である。

量子論では、軌道角運動量 \mathbf{l} を拡張して設問3の交換関係を満たす演算子を角運動量 \mathbf{J} と呼ぶ。以下では、角運動量 \mathbf{J} のみが力学変数である力学系を考える。ここで、変数 A を $A = J_x - iJ_y$, 変数 B を $B = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ と定義する。次の設問に答えよ。

4. $A^\dagger A$ および AA^\dagger を B と J_z を用いて書け。ただし、 A^\dagger は A の複素共役演算子である。
5. B は演算子ではなくただの数であることを示せ。

J_z は固有値を持つと考えて、その固有値を θ_z および固有状態を $|\theta_z\rangle$ とする。次の設問に答えよ。

6. $A|\theta_z\rangle \neq 0$ ならば $A|\theta_z\rangle$ も J_z の固有状態であることを示せ。また、その固有値を求めよ。
7. $\langle \theta_z | A^\dagger A | \theta_z \rangle \geq 0$ と $\langle \theta_z | AA^\dagger | \theta_z \rangle \geq 0$ を用いて、 $-m \leq \theta_z \leq m$ を証明せよ。ただし、 $m = \sqrt{B + \frac{1}{4}\hbar^2} - \frac{1}{2}\hbar$ である。
8. 以上の結果を用いて、 m が \hbar の整数倍であるかまたは半整数倍であることを示せ。

第2問

スピン $1/2$ の粒子が大きさ H の磁場の下におかれると、ゼーマン効果によって、そのエネルギー準位は $-\mu H, +\mu H$ (μ は正の定数) に分裂する。このような粒子 N 個が大きさ H の一様な磁場の下におかれ、温度 T に保たれている系を考え、これをカノニカル分布によって取り扱う。最初は粒子間に相互作用がないとして、以下の設問に答えよ。ただし、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ (k_B はボルツマン定数) を用いてもよい。

1. この系の自由エネルギー F を求めよ。
2. 磁場に平行方向の磁化 M と、 $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ を求めよ。ただし磁化は $M = -\partial F / \partial H$ 、磁化率は $\chi = \partial M / \partial H$ で定義される。

次に、 N 個の粒子が 2 個ずつ $N/2$ 組の対になり、対を組んだ粒子間にはそれぞれのスピンの内積に比例する相互作用が働く場合を考える。異なる対に含まれる粒子間には相互作用が働かないとする。磁場の方向を z 方向とすれば、一つの対のハミルトニアンは、対に含まれる 2 粒子のスピン演算子 s_1, s_2 とその z 成分 s_{1z}, s_{2z} を用いて、

$$\mathcal{H} = V \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - 2\mu(s_{1z} + s_{2z})H$$

と書くことができる。 V は相互作用の大きさと符号を表すパラメータである。このとき以下の設問に答えよ。

3. ハミルトニアン \mathcal{H} のエネルギー固有値を求めよ。
4. $N/2$ 組の対からなる系全体の自由エネルギー F を求めよ。
5. 磁場に平行方向の磁化 M と、 $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ を求めよ。
6. 設問 5 で求めた磁化率の低温極限 ($k_B T / |V| \ll 1$) での振舞いを調べ、それが V の符号によって定性的に異なる理由を簡単に説明せよ。

第3問

質量 m_1 の太陽と質量 m_2 の地球がお互いの重力によってケプラー運動しているものとする。簡単のために以下では軌道の離心率は無視して円運動の場合のみを考える。それらの公転面上で太陽と地球の重心を原点とする2次元座標系として、慣性系 S と、太陽と地球が常に x 軸上の点 P_1 と点 P_2 に位置するような回転系 S' を考える (図1参照)。太陽と地球の距離を a とすれば、 P_1 と P_2 の座標はそれぞれ $(-\mu_2 a, 0)$ 、 $(\mu_1 a, 0)$ で与えられる。ただし、

$$\mu_1 \equiv \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

である。また、この回転系の角速度 ω はケプラーの第3法則より、

$$G(m_1 + m_2) = \omega^2 a^3 \quad (2)$$

を満たす (G はニュートンの重力定数)。

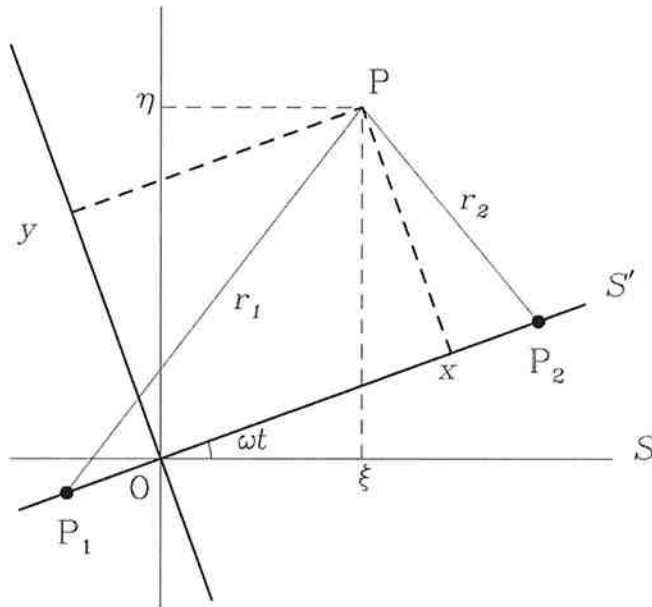


図 1:

1. この平面上の任意の点を P としたとき、 S 系における P の成分 (ξ, η) を S' 系での成分 (x, y) で表わせ。
2. S' 系からみて (x, y) の位置にある質量 m の質点を考える。 m は m_1 および m_2 に比べて十分小さく、この質点は太陽と地球のケプラー運動には影響を与えないとした時、設問1の結果からこの質点に対するラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + m\omega(xy - \dot{x}y) + Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) \quad (3)$$

となることを示せ。ただし、

$$r_1 \equiv \sqrt{(x + \mu_2 a)^2 + y^2}, \quad r_2 \equiv \sqrt{(x - \mu_1 a)^2 + y^2} \quad (4)$$

である。

3. この質点の S' 系における運動方程式の x 成分および y 成分を書き下せ。
4. S' 系から見たとき、この質点の加速度と速度がともに 0 となるような特別な点 ($\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$) はラグランジュ点と呼ばれ、全部で 5 つあることが知られている。運動方程式の y 成分を考えることで、ラグランジュ点は

$$\mu_1 \left(\frac{a}{r_1} \right)^3 + \mu_2 \left(\frac{a}{r_2} \right)^3 = 1 \quad (5)$$

あるいは

$$y = 0 \quad (6)$$

のいずれかを満たすことを示せ。

5. 式 (6) を満たす S' 系の x 軸上にあるラグランジュ点は、図 2 に示されているように、 P_1 と P_2 の外側に一つずつ、および P_1 と P_2 の中間に一つ、合わせて 3 個存在することが知られている。特に地球からみてちょうど太陽の反対側にある L_2 点は、天文観測衛星に適した位置である。この L_2 点と P_2 との距離を r_2 として運動方程式の x 成分を考えれば、 μ_2/μ_1 が $u \equiv r_2/a$ の関数として

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3u^3}{(1+u)^2} \frac{1+u+u^2/3}{1-u^3} \quad (7)$$

と書けることを示せ。変形の際、 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ であることに注意せよ。



図 2:

6. 式 (7) から、 $\mu_2/\mu_1 \ll 1$ の場合 $u \ll 1$ となることがわかる。この場合、 L_2 点の位置 u を μ_2/μ_1 の最低次で求めよ。特に、太陽と地球の系 ($\mu_2/\mu_1 \approx 3 \times 10^{-6}$ 、 $a = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$) の場合、地球と L_2 点までの距離の値を近似的に求めよ。

第4問

中性子と原子核との弾性散乱を利用して中性子を検出したい。これに関連した以下の設問に答えよ。ただし運動はすべて非相対論的に扱えるものとし、必要に応じて、中性子質量 = 陽子質量 = $1000 \text{ MeV}/c^2$ (c は光速)、質量数 A の原子核の質量 = $1000A \text{ MeV}/c^2$ を用いよ。

1. 運動エネルギー T の中性子が、静止した質量数 A の原子核と弾性散乱する際、原子核に与えられる反跳エネルギーの最大値 E_{max} を求めよ。また E_{max} は $A = 1$ 、すなわち陽子と散乱する場合に最大となることを示せ。
2. 中性子-陽子の弾性散乱における陽子の反跳エネルギー分布 dW/dE を、以下の手順で求めよ。ここで dW は陽子の反跳エネルギーが E と $E + dE$ との間にある確率である。
 - (a) 陽子の反跳エネルギー E を、中性子のエネルギー T と重心系での散乱角 θ^* (図1参照) で表せ。
 - (b) 散乱は重心系において等方的、すなわち $d\sigma/d\Omega^* = \text{一定}$ であるとする。ただし σ は散乱断面積、 Ω^* は重心系での立体角である。設問2(a) で求めた E と θ^* の関係を利用して dW/dE を求め、その概略を図示せよ。

以下では、中性子検出器として、プラスチック・シンチレーター (密度 1 g/cm^3 、元素組成が $\text{C}:\text{H} = 1:1$ である蛍光物質) と光電子増倍管を組み合わせたものを用いる場合を考える。ただし、中性子と炭素の衝突による効果は無視でき、また、検出器は反跳陽子を 100% の効率で検出できるものとする。次の設問に答えよ。

3. この検出器に中性子が入射してから光電子増倍管から電気信号が出るまでの過程を 200 字以内で記述せよ。
4. シンチレーター中での中性子の平均自由行程 λ を、中性子と陽子の弾性散乱断面積 σ と単位体積あたりの水素原子数 n を用いて表せ。
5. シンチレーターの厚さが x の場合の中性子検出効率 (検出器が厚い場合にも適用できる一般式) を、 λ と x を用いて表せ。
6. 図2に示す中性子と陽子の弾性散乱断面積のグラフを用いて、厚さ 10 cm のプラスチック・シンチレーターの、運動エネルギー 20 MeV の中性子に対する検出効率を精度一桁で概算せよ。必要に応じてアボガドロ数 $N_A = 6 \times 10^{23}$ を用いよ。

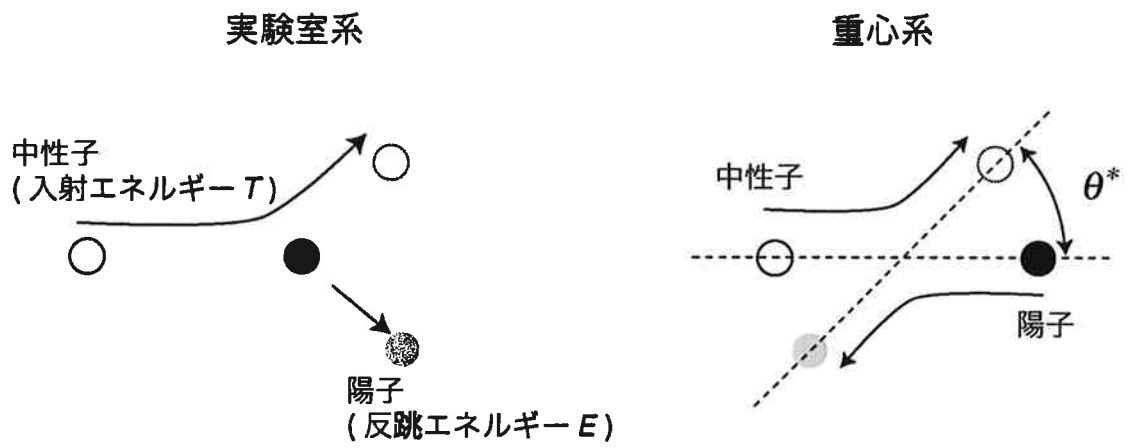


図 1:

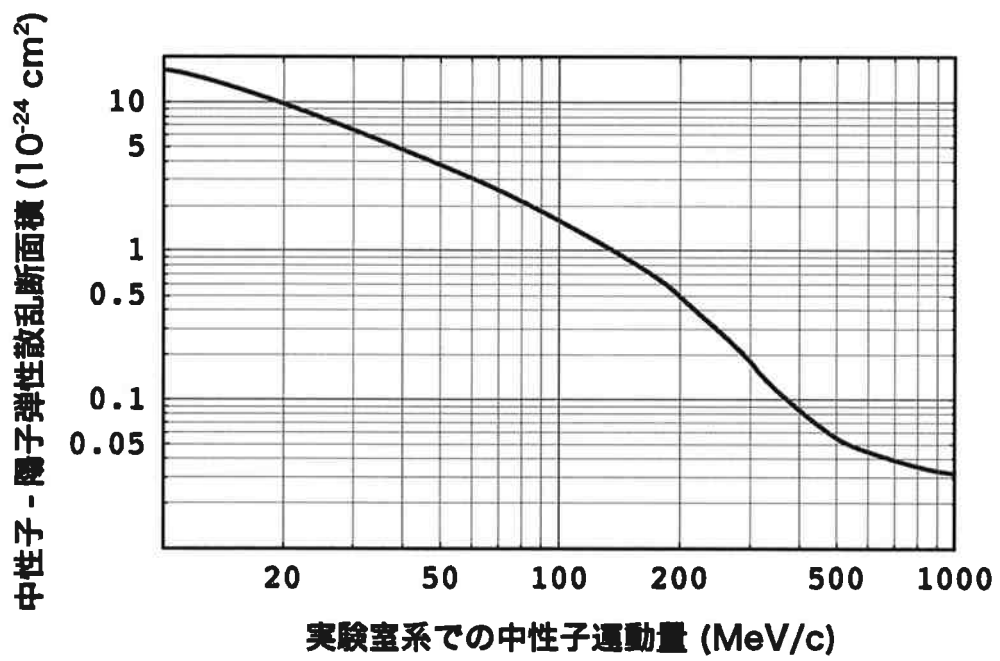


図 2:

第5問

比熱測定は物質のエントロピーや内部エネルギー、さらには相転移現象について有用な情報が得られる実験手段である。低温での比熱測定に関連して以下の設問に答えよ。

1. 一般に固体の比熱は図1に示すような装置を用いて測定できる。ヒーターおよび抵抗温度計が取り付けられた基板の上に試料を乗せ、ヒーターで一定の熱量を加えたときの温度上昇から比熱が求まる。この測定を精度良く行うために実験上注意すべき点を200字以内で述べよ。

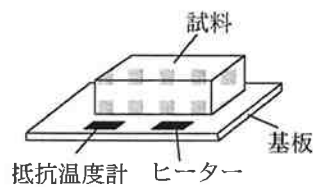


図1:

2. 比熱 $C(T)$ を用いてエントロピー $S(T)$ および内部エネルギー $U(T)$ を表せ。ただし、 $T = 0$ での内部エネルギー $U(0)$ を使い、また $S(0) = 0$ とせよ。
3. 図1の装置を用いてアルミニウムの1モル当たりの比熱 C を温度範囲 $1.22 \text{ K} \leq T \leq 4 \text{ K}$ で測定した結果を、縦軸に C/T 、横軸に T^2 をとって図2に○印で示す。この図から $C(T)$ には格子振動を起源とする T^3 に依存する項の他に、より主要な寄与があることがわかる。その温度依存性と係数、およびその起源を答えよ。

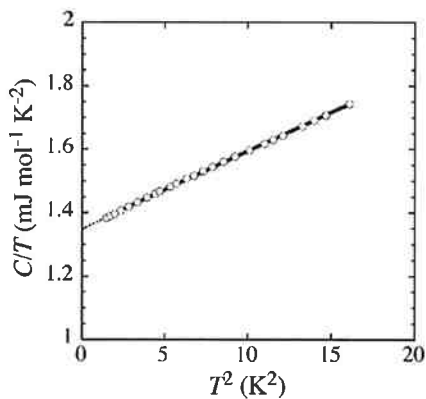


図2:

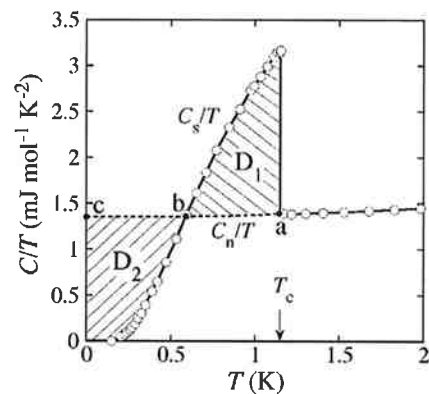


図3:

アルミニウムの比熱をより低温の 0.2 K まで測定した結果について縦軸に C/T 、横軸に T をとって描いたものを図3に示す。この図の点線 (a-b-c) は図2のデータを低温まで外挿したもので、通常の金属で期待される振舞いである (正常状態と呼ぶ)。実際の測定データはこの延長線上には乗らず、転移温度 $T_c = 1.16 \text{ K}$ で2次相転移 (超伝導転移) による飛びを示した。ここで C_s 、 C_n はそれぞれ超伝導状態および正常状態における比熱を表す。

4. T_c における相転移が2次相転移であることに注意して、図3の領域 D_1 と領域 D_2 の面積が等しくなることを示せ。

超伝導状態にあるアルミニウムに大きさ H の磁場をかけると、ある磁場で超伝導が壊れて正常状態に1次相転移する。このときの磁場を臨界磁場 H_c と呼ぶ。次にこの相転移を熱力学的に考察しよう。磁場中における、正常状態および超伝導状態の自由エネルギー $G_n(T, H)$ 、 $G_s(T, H)$ は次式で与えられる。

$$G_{n,s}(T, H) = G_{n,s}(T, 0) - V \int_0^H B dH \quad (8)$$

ここで V はアルミニウムのモル体積、 B は試料内の磁束密度を表し一様とする。そして正常状態では $B = \mu_0 H$ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m)、超伝導状態では $B = 0$ であるとする。 $G_n(T, 0)$ 、 $G_s(T, 0)$ は $G = U - TS$ の関係式を使って比熱の測定データから求めることができる。その温度依存性を示したものが図4である。ただし $G_n(0, 0) = 0$ とした。

5. $G_n(T, H)$ および $G_s(T, H)$ の磁場依存性を表す式を示せ。また図4を参考に一定磁場 H のもとでの G_n と G_s の温度依存性を図示して、この相転移が1次転移である理由を述べよ。ただし $G_n(0, H) > G_s(0, H)$ が成り立つ磁場範囲について答えよ。
6. $T = 0$ におけるアルミニウムの臨界磁束密度 $B_c(0) = \mu_0 H_c(0)$ を図4のデータをもとに有効数字1桁で求めよ。ただし、アルミニウムのモル体積は $10 \text{ cm}^3/\text{mol}$ とする。
7. この様にして求めたアルミニウムの臨界磁場の温度依存性を図5に示す。 $T/T_c \ll 1$ では $H_c(T) = H_c(0)(1 - aT^2)$ (a は定数) となることが知られている。正常状態の C/T の $T = 0$ への外挿値を γ 、また $\delta = G_n(0, 0) - G_s(0, 0)$ として、 a を γ および δ を用いて表せ。

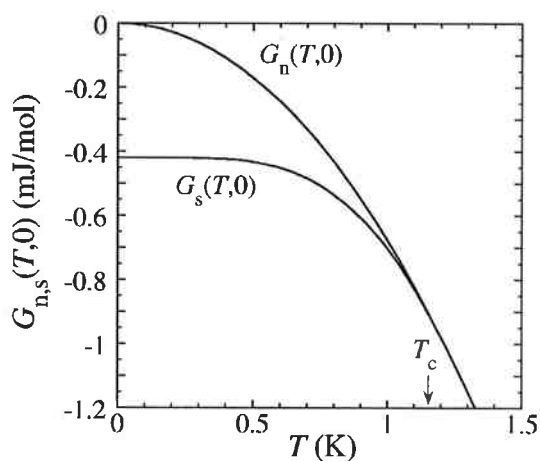


図4:

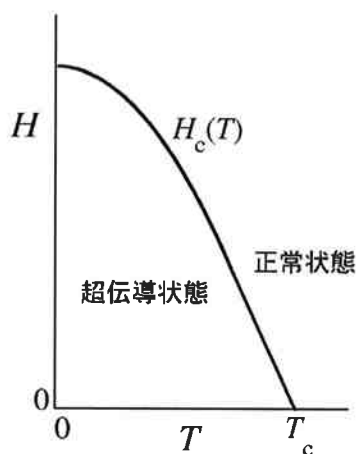


図5:

第6問

図1は、水素原子の主量子数 $n = 2$ のエネルギー準位構造を示している。 $2P_{3/2}(j = 3/2)$ と $2S_{1/2}(j = 1/2)$ とのエネルギー差を $h\nu_1$ 、 $2S_{1/2}(j = 1/2)$ と $2P_{1/2}(j = 1/2)$ とのエネルギー差を $h\nu_2$ とする。ただし、 h はプランク定数、 j は電子の軌道角運動量 l とスピン角運動量 s を合成した角運動量 $j = l + s$ の大きさを \hbar を単位として表した量子数である。

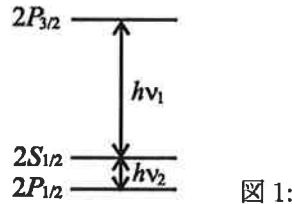


図1:

図2(a)は、このエネルギー差 $h\nu_1$ 、 $h\nu_2$ を精密に測定するための実験装置である。 $1S_{1/2}$ にある水素原子を、電子線との衝突により $2S_{1/2}$ へ励起する。 $2S_{1/2}$ は寿命が $2P_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ に比べ著しく長いため、 $1S_{1/2}$ に遷移する前に金属板に衝突する。そのとき放出される電子を対向電極（正極）で捕らえることにより、 $2S_{1/2}$ にある原子数を検流計の電流値として観測することができる。導波管内で原子に照射するマイクロ波の周波数が、例えば ν_1 に一致（共鳴）すると、図2(b)に示すように $2P_{3/2}$ への遷移が起き、この準位からは速やかに $1S_{1/2}$ へ自発放射により遷移するため、金属板から電子が放出されず検流計の電流値は減少する。

1. この実験装置では、電子線発生器のグリッド、アノードは接地されている。フィラメント（カソード）の電位は何Vに設定するのが適当か、理由と共に答えよ（ヒント：水素原子のイオン化エネルギーは 13.6 eV）。
2. 一般に、原子が自発放射によって遷移する確率は、始状態と終状態の間の電気双極子モーメントの大きさの2乗に比例する。 $2S_{1/2}$ の寿命が $2P_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ に比べ著しく長い理由を簡潔に述べよ。

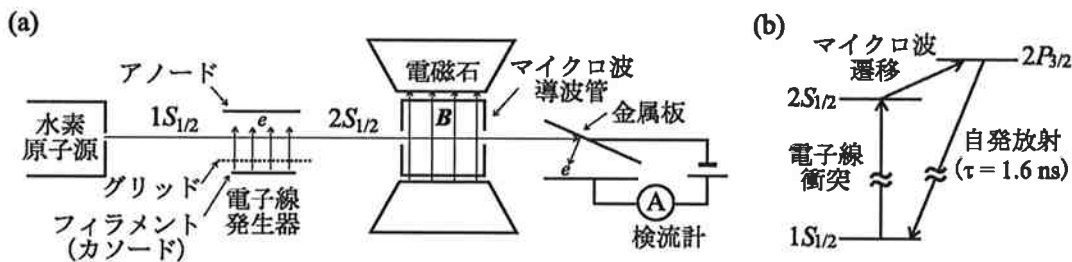


図2:

電磁石を用いて導波管内に外部磁場を印加すると、 $2S_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ の磁気副準位のエネルギーはゼーマンシフトする。外部磁場と水素原子との相互作用（ゼーマンエネルギー）を表すハミルトニアンは、磁場の向きを z 軸にとれば、

$$\mathcal{H}_Z = \frac{\mu_B}{\hbar}(l_z + 2s_z)B$$

と表される。ただし、 μ_B はボーア磁子、 B は磁場（磁束密度）の大きさである。図 3(a) に $2S_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ の磁気副準位のゼーマンシフトの様子を示す（縦軸の目盛は省略されている）。図中の m は角運動量 j の磁気量子数を表す。

3. マイクロ波遷移 $\alpha(2S_{1/2}, m = 1/2) \rightarrow a(2P_{3/2}, m = 3/2)$ の共鳴周波数のゼーマン効果による変化量を $\Delta\nu$ とする。 $\Delta\nu$ の磁場依存性を μ_B, B を用いて表せ。
4. 図 3(b) は、マイクロ波周波数 11.5 GHz において、磁場の大きさを変化させながら検流計の電流値の減少量を測定して得られたマイクロ波遷移 $\alpha \rightarrow a$ の共鳴曲線である。この実験結果、および設問 3 の結果を用いて、 ν_1 の値を有効数字 2 桁で計算せよ（ヒント： $\mu_B/h \approx 14$ GHz/T）。
5. $2P_{3/2}$ 準位の寿命 ($\tau = 1.6$ ns) で決まるマイクロ波遷移 $\alpha \rightarrow a$ の共鳴曲線の線幅を有効数字 2 桁で計算せよ。図 3(b) で観測された共鳴曲線の線幅は、 $2P_{3/2}$ 準位の寿命で決まる線幅よりも広い。その要因として考えられるものを挙げよ。

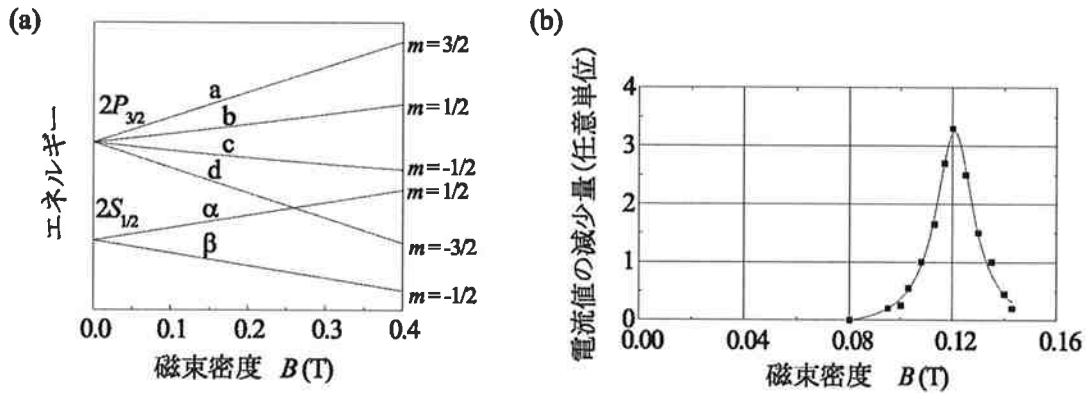


図 3:

1947 年、Lamb と Retherford は図 2(a) の実験装置を用いて、 ν_1 と同時に ν_2 の値も精密に測定し、Dirac の相対論的電子論では縮退すると予想されていた $2S_{1/2}$ および $2P_{1/2}$ 準位が、実際には分裂していることを確認した。この分裂はラムシフトと呼ばれている。

6. ラムシフトは、電磁場の真空揺らぎ（零点振動）によって点電荷が実効的に有限な広がりを持つと考えることによって定性的に説明できる。この考え方を用いて、ラムシフトにより $2S_{1/2}$ のエネルギーが $2P_{1/2}$ よりわずかに高くなる理由を述べよ。