平成１９年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成１８年８月２９日（火）　１０時００分～１１時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3．問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4．答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。
5．各答案用紙の所定欄に**科目名(数学)**、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
6．解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7．答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10．答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第１問

正方行列 A に対して、$U^{-1}AU$ が対角行列になるようなユニタリ行列 U が存在するためには、A が正規行列であることが必要十分である。正規行列とは、$A^*A = AA^*$ を満たす行列であり、A^* は行列 A を転置し複素共役をとった行列である。実ユニタリ行列を直交行列と呼ぶ。以下の設問に答えよ。

1. 行列
$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
は直交行列であることを示せ。ここで、θ は実数。

2. 任意の正方行列 A について、
$$\exp A \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$
は収束し、$\exp A$ を定義することができる。ただし、A^0 は単位行列とする。$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ のとき、
$$\exp A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = B$$
を示せ。

3. 行列 B を対角化せよ。

次に、一般の次元をもつ行列の例として、変数の組 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ について

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

を考えよう。

4. $|C| \propto \prod_{i<j}(x_j - x_i)$ を示せ。ここで $|C|$ は行列 C の行列式。

5. この結果を用いて、上記の行列 C が正則である（逆行列をもつ）のはどのような場合かを述べよ。

第２問

二つの実変数 x, y の実関数 $u(x,y)$,　$v(x,y)$ は至るところで有限な値を持ち、任意回微分可能で、さらに関係式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad , \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{1}$$

を満たしているものとする。

1. 以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{2}$$

2. ストークスの定理は、微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の、閉曲線 C を一周する線積分と、C を縁とする面 S 上の面積分との関係を表し、次式で与えられる。

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \iint_{\mathrm{S}} [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})] \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS \quad . \tag{3}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ は、面 S 上の点 $\boldsymbol{x}$ におけるこの面の法線ベクトルである。この定理を用いて、xy 平面上の任意の閉じた経路 C に関する線積分に対して、以下の二式が成り立つことを示せ。

$$\oint_{\mathrm{C}} [u(x,y)dx - v(x,y)dy] = 0 \quad , \qquad \oint_{\mathrm{C}} [u(x,y)dy + v(x,y)dx] = 0 \quad . \tag{4}$$

3. i を虚数単位とし、複素数 z を $z = x + iy$ によって定義する。また、複素関数 $f(z)$ は実関数 $u(x,y)$,　$v(x,y)$ を用いて、$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ のように表されるものとする。式 (4) が成り立っているとき、複素平面上の任意の閉じた経路 C に関する線積分に対して、以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\oint_{\mathrm{C}} f(z) dz = 0 \quad . \tag{5}$$

4. 複素関数 $f(z)$ の例として、$f(z) = e^{-z^2}$ を考える。
$f(x+iy)$ の実部を $u(x,y)$,　虚部を $v(x,y)$ としたとき、式 (1) が成り立つことを示せ。

5. 以上の結果を用いて、実数 p に対して、定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2px) dx \tag{6}$$

を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{7}$$

となることは既知としてよい。