

平成18年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

英 語 ・ 数 学

平成17年8月30日（火） 9時00分～11時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で4問ある。4問のすべてに解答せよ。
4. 答案用紙は数学2枚、英語2枚（罫線入り）が配布されていることを確かめること。
5. 数学の解答は2枚とじ答案用紙に記入し、1問ごとに別のページを用いること。英語の解答は罫線入りの2枚とじ答案用紙に記入し、同じく1問ごとに別のページを用いること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**（数学または英語）、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。

数 学

第 1 問

複素数を成分とする n 行 1 列 ($n \geq 1$) の縦ベクトル全体の集合 \mathbb{C}^n は、 n 次元の複素線形空間をなす。2つのベクトル $x, y \in \mathbb{C}^n$ について、その内積 (x, y) を、 $(x, y) \equiv x^\dagger y$ にて定義する。ただし、 x^\dagger は x のエルミート共役 (転置の複素共役) を表す。 $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}$ を x のノルムと言う。 A を n 行 n 列のエルミート行列とし、その固有値はどれも縮退がないとする。固有値 a に対応する (属する) 規格化された固有ベクトルを u_a と記す。即ち、

$$A u_a = a u_a, \quad (u_a, u_{a'}) = \delta_{a, a'}.$$

固有値 a は全て実数である。また、全ての a について u_a を集めた集合 $\{u_a\}$ は、 \mathbb{C}^n の正規直交完全系を成す。以下の設問に答えよ。

(i) 各固有値 a ごとに、次の行列を定義する：

$$P(a) \equiv u_a u_a^\dagger.$$

このとき、次の等式が成り立つことを示せ：

$$P(a)P(a') = \delta_{a, a'} P(a).$$

(ii) 適当に選んだベクトル x について、もしも $P(a)x$ がゼロベクトルでなければ、 $P(a)x$ は固有値 a に対する A の固有ベクトルであることを示せ。

(iii) 次の等式を示せ：

$$A = \sum_a a P(a).$$

即ち、任意の $x \in \mathbb{C}^n$ について、 $Ax = \sum_a a P(a)x$ を示せ。

(iv) 固有値 a の全てについて定義された関数 $f(a)$ を用いて、次の行列 $f(A)$ を定義する：

$$f(A) \equiv \sum_a f(a) P(a).$$

$f(A)$ の固有値と固有ベクトルが、それぞれ $f(a)$, u_a で与えられることを示せ。

(v) A の最小固有値を a_0 とする。適当に選んだベクトル x について、 $P(a_0)x$ がゼロベクトルでなかったとする。このとき、

$$v \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-At} x}{\|e^{-At} x\|}$$

とおくと、 v が a_0 に対応する固有ベクトルであることを示せ。ただし、 t を任意の実数として、 $f(a) = e^{-at}$ と選んだ場合の $f(A)$ を e^{-At} と記した。

第2問

以下の積分を考える。

$$S = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x)) dx. \quad (1)$$

ここで、 $y'(x) \equiv dy(x)/dx$ である。また、 $F(y, y')$ および $y(x)$ は、いずれの変数についても何回でも微分可能な連続かつ一価な関数とする。さらに、曲線 $y = y(x)$ の端点は、 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ のように固定されているものとする。以下の設問に答えよ。

- (i) 積分 S が曲線 $y = y(x)$ の変化に対して極値をとるための十分条件となる微分方程式を、関数 $y(x)$ の微小変分 $\delta y(x)$ を考える事で導出せよ。

- (ii) 設問 (i) で求めた微分方程式は、

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C,$$

に変形できることを示せ。ここで、 C は定数である。

- (iii) 曲線 $y = y(x)$ の両端点が $x_1 > x_0 > 0$, $y_1 > 0$, $y_0 > 0$ を満たすとする。この曲線を x 軸のまわりに 360° 回転して得られる回転面を考え、その表面積を (1) 式の形の積分を用いて表せ。

- (iv) 設問 (iii) で得られた表面積を最小にする曲線 $y = y(x)$ が満たす微分方程式を導け。

- (v) 設問 (iv) で得られた微分方程式を解き、曲線 $y(x)$ を求めよ。

英 語

第 1 問

以下の文は、陽電子の発見者で 1936 年にノーベル物理学賞を受賞した、C. D. Anderson の自伝的な記事 (1985) からの抜粋で、部分的に和文の要約に置き替えてある。これを読み、問 (i)–(vi) に、いずれも 日本語 50 文字程度で答えよ。下線のついた英単語は、意味が下にまとめてある。

My thesis work as a graduate student at Caltech consisted of studying, by means of a Wilson cloud chamber, the space-distribution in various gases of photoelectrons produced by X-rays. Meantime (1926 to 1929), Dr. Chung-yao Chao, working in a room close to mine, was using an electroscope to measure the absorption and scattering of gamma-rays from ThC''. His findings interested me greatly. At that time, the 2.6 MeV gamma-rays from ThC'' were believed to interact with matter wholly by Compton collisions as governed by the Klein-Nishina formula. Dr. Chao's results showed clearly that the gamma-ray absorption was much greater than that calculated by the Klein-Nishina formula.

この謎を、霧箱を使って解明しようと改良を重ねるうちに、Anderson は同じ大学の Millikan 教授（油滴を用いた素電荷の発見で著名、1923 年にノーベル物理学賞を受賞）にその手腕を認められ、宇宙線の実験装置の製作を依頼される。

Dr. Millikan wanted me to build an instrument to measure the energies of the electrons present in the cosmic radiation. I began work on the design of the instrument which he had proposed for the cosmic ray studies. It was to consist of a cloud chamber operated in a strong magnetic field. The magnet, as actually designed and built, was a pair of air-core solenoids capable of operating at 600 kW. When operated at full power, the magnetic field through the whole cloud chamber was slightly over 25 kilo-gauss. The first results from the magnet cloud chamber were dramatic and completely unexpected. There was an approximately equal number of particles of positive and negative curvatures, in sharp contrast to the electrons expected from the Compton scattering of high energy photons.

そこで Anderson らは実験を重ねた結果、問題の粒子は陽子ではなく、また下から上に向かう電子でもなく、電子とほぼ同じ質量をもち、かつ電荷の符号が反対な、新種の粒子であるという結論に達する。すなわち陽電子 (positron) の発見である。

It has often been stated in the literature that the discovery of the positron was a consequence of its prediction by Paul A. M. Dirac, but this is not true. The discovery of the positron was wholly accidental. Despite the fact that Dirac's relativistic theory of electrons was an excellent theory of the positron, and despite the fact that the existence of this theory was well known to all physicists including myself, it played no part in the discovery of the positron.

It was not immediately obvious to me, however, as to just what the detailed mechanism was in the production of positrons. Did they somehow acquire their positive charge from the nucleus? The idea that they were created out of the radiation itself did not occur to me, until Patrick M. S. Blackett and Giuseppe P. S. Occhialini suggested the pair-production hypothesis based on their beautiful experiments on cosmic rays. Namely, a pair of electrons, one positive and one negative, are created in the Coulomb field of a nucleus, when the incident gamma-ray has an energy higher than $2m_e c^2$.

- ・ thesis work : 「博士論文の課題」
- ・ Caltech : 「カリフォルニア工科大学」
- ・ cloud chamber : 「霧箱」。Wilson が発明した実験装置で、放射線が通過すると、そのイオン化により霧ができ、飛跡を見ることができる。
- ・ electroscope : 「箔検電器」
- ・ ThC'' : トリウム系列の放射性同位体の一種
- ・ MeV : 10^6 電子ボルト
- ・ Klein-Nishina formula : 「クライン-仁科の公式」。コンプトン散乱の断面積を相対論的に記述する公式。
- ・ cosmic radiation : 「宇宙放射線」。宇宙線とほぼ同義。宇宙から飛来する、さまざまな高エネルギー粒子。
- ・ $m_e c^2$: m_e は電子の質量。 c は光速。 $m_e c^2$ の値は 0.511 MeV。

- (i) Anderson が霧箱を使って解明しようとしたこの謎とは何か。
- (ii) Millikan が Anderson に製作を依頼した装置は、なぜ強い磁場を必要としたのか。
- (iii) 霧箱に強い磁場をかけることは、結果としてなぜ陽電子の発見につながったのか。
- (iv) Anderson は、陽電子の発見と、Dirac の陽電子理論とは、どのような関係にあったと述べているか。
- (v) 当初 Anderson は、陽電子の起源としてどんな可能性を想像したか。また後には、どのような考えが正しいと判明したか。
- (vi) Dr. Chao の測定で、ガンマ線の吸収が予想よりずっと強かったのは、結局なぜだったと考えられるか。

第2問

以下は、東アジア地域の物性物理学の若手研究者たちが、中国の上海で交流ワークショップを開催した際、それに出席したある日本人の大学院生が、英語で書いた感想文の抜粋である。これを読み、以下の設問 (i)-(vi) に答えよ。ただし内容はすべて架空である。

The workshop was formed by young scientists from the mainland China, Korea, Taiwan, [a] Japan. The number of participants [reached to] ア 50, including 10 from Japan. For all of us Japanese, this was the first visit to China. A new convention center was used as the conference site エ, which was built in 2004 and is located close to the Shanghai downtown.

During lunchtime on the first day, I became acquainted with two graduate students, Mr. Cheng from Beijing and Miss Wu from Taipei, who are engaged in numerical studies of high-temperature superconductors and organic materials with ferromagnetism, respectively オ. Miss Wu [mentioned to] イ her recent progress, enabled by 《new computer》 キ which she bought last year. This brought us into 《chat》 ク on rapid increase in the computational power. A Korean semiconductor experimentalist with 《humor》 ケ, who joined us, said; “We can’t imagine what kind of computers our children are using when they are grown up”, and 《rest》 コ of us agreed, “Indeed, [b]”.

On the second day, there was a session as to the way of enhancing collaboration between experimentalists and theoreticians. I explained that the Japanese graduate education generally requires us to choose theory [c] experiment. However, this was not appreciated very much. Over the whole late afternoon we [discussed about] ク 《problem》 ケ, while we did not eat [d] drink. This made our dinner even more delicious. Particularly, I loved 《dish》 シ which used some kind of river fish.

In short, all the participants were カ very much satisfied with 《workshop》 ス and the Shanghai cuisine. I had 《impression》 セ that these east-Asian foreign scientists are generally excellent, often with a much broader interest, 《higher intelligence》 ソ, and better skill of communication than we Japanese. I hope to make better friends with them.

- (i) [a]～[d]の中に入れる単語として、and、or、yes、noの中から、最も適当と思われるものを選び。同じ答えを複数回にわたり使っても良い。
- (ii) 四角で囲った [reached to] ア、[mentioned to] イ、および [discussed about] ク には、ある共通の文法的な誤りがある。それを指摘せよ。
- (iii) 下線部 A new ...conference site エ では、後続の関係代名詞 which とそれが指すものが離れているため、論理が不明確である。より論理が明確になるよう、下線部を書き替えよ。
- (iv) respectively オ がある場合とない場合で、この部分の意味はどう異なるか、説明せよ。
- (v) all the participants were カ を、ほぼ同じ意味を保ったまま、単数形を主語として書き替えよ。
- (vi) 英語では、可算名詞（数えられる概念で単数形と複数形のある名詞）を単数形で用いる場合、必ず不定冠詞 a もしくは定冠詞 the をつけるのが原則である。一方、非可算名詞には a はつけられず、無冠詞でもよい。いずれの場合も、「文章に登場済みだったり、論理的に考えて特定できる概念には the を付け、そうでなければ the を付けない」という原則がある。この規準に照らしたとき、単数形の名詞（あるいは形容詞＋名詞）《 》 キ～《 》 ソ のそれぞれは、このまま無冠詞でよいか、a（もしくは an）をつけるべきか、あるいは the をつけるべきか。無冠詞、a、an、theの中から選んで答えよ。