平成２０年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成１９年８月２７日（月）　１０時００分～１１時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3．問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4．答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。
5．各答案用紙の所定欄に**科目名**(数学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
6．解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7．答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10．答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第１問

(i) ３次元空間回転を表す３次元実正方行列すべての集合を R とする。R は単位行列 I も含むものとする。これに関して、以下の各命題の真偽を○ (真) か× (偽) かで答えよ。

(a) $X \in R$ かつ $Y \in R$ ならば $XY \in R$ である。

(b) $X \in R$ かつ $Y \in R$ ならば $XY = YX$ である。

(c) $X \in R$ ならば ${}^tXX = X{}^tX = I$ である。ただし、${}^tX$ は X の転置行列を表す。

(d) ${}^tXX = X{}^tX = I$ であるならば $X \in R$ である。

(e) $X \in R$ ならば $U^\dagger XU$ が対角行列であるようなユニタリ行列 U が存在する。ただし、$U^\dagger$ は U のエルミート共役行列 (転置行列の複素共役) を表す。

(ii) $\Omega(\boldsymbol{n}, \theta)$ を、単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向を回転軸とした角度 θ の回転を表す３次元実正方行列とする。ここで、$\boldsymbol{n}$ 方向に右ねじを進める時右ねじを回す向きを正とする回転角を θ とする。また、任意の３次元実ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ に対して、$\boldsymbol{v}(\theta)$ を $\boldsymbol{v}(\theta) = \Omega(\boldsymbol{n}, \theta)\boldsymbol{v}_0$ で定義する。以下の設問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ のとき、$\Omega(\boldsymbol{n}, \theta)$ の３つの固有値を答えよ。

(2) 任意の $\boldsymbol{n}$ に対して、$\Omega(\boldsymbol{n}, \theta)$ の３つの固有値を答えよ。

(3) 原点を始点としたとき $\boldsymbol{v}(\theta)$ の終点がどれだけ移動するかを考えて、

$$\boldsymbol{v}(\theta + \Delta\theta) - \boldsymbol{v}(\theta) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(\theta)\ \Delta\theta$$

となることを説明せよ。ただし、 $\Delta\theta$ は θ に比べて十分小さいものとする。また、$\times$ はベクトル積（外積）である。必要なら図を用いて説明してもよい。

(4) 設問 (3) の結果から得られる $\boldsymbol{v}(\theta)$ に関する微分方程式を解くことによって、

$$\Omega(\boldsymbol{n}, \theta) = e^{\theta A(\boldsymbol{n})}$$

であることを示せ。ここで、$A(\boldsymbol{a})$ は、ある３次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して決まる３次元実正方行列であり、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して $A(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}$ を満たすものとする。

(5) ３次元実交代行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし、} x_{ij} = -x_{ji}, \quad i, j = 1 \sim 3)$$

に対して、$X = A(\boldsymbol{a}_0)$ となるような３次元実ベクトル $\boldsymbol{a}_0$ を求めよ。ここで、A は設問 (4) で定義されたものと同じである。

(6) $Y = e^X$ となるような3次元実交代行列 X が存在するならば Y は3次元回転を表す行列であることを示せ。

第２問

$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$$

と定義する。以下の設問に答えよ。

(i) $f_n(x)$ は x の多項式である。x の何次の多項式であるか答えよ。

(ii) $n > 1$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_n(x) e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

(iii) 一般の n に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_n(x) e^{-x^2} dx$$

を求めよ。ただし、必要であれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

(iv) z を複素数とするとき、

$$e^{-z^2} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{e^{-\omega^2}}{\omega - z} d\omega$$

が成り立つ。ここで、複素平面上の積分経路 C は、図１のような z を中心とした半径１の反時計回りの円周であるとする。このことを用いて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(z) = e^{-t^2 - 2zt} \qquad (|t| < 1)$$

となることを示せ。ただし、今の場合、無限級数和と積分の順序を入れ替えてもよい。

(v) 設問 (iv) で得られた関数 e^{-t^2-2tz} は、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-t^2-2tz} - 2z \frac{\partial}{\partial z} e^{-t^2-2tz} = -2t \frac{\partial}{\partial t} e^{-t^2-2tz}$$

という式を満たす。このことを用いて、関数 $f_n(z)$ が

$$\frac{d^2}{dz^2} f_n(z) - 2z \frac{d}{dz} f_n(z) + \lambda f_n(z) = 0$$

という微分方程式を満たすということを示し、そのときの λ を求めよ。

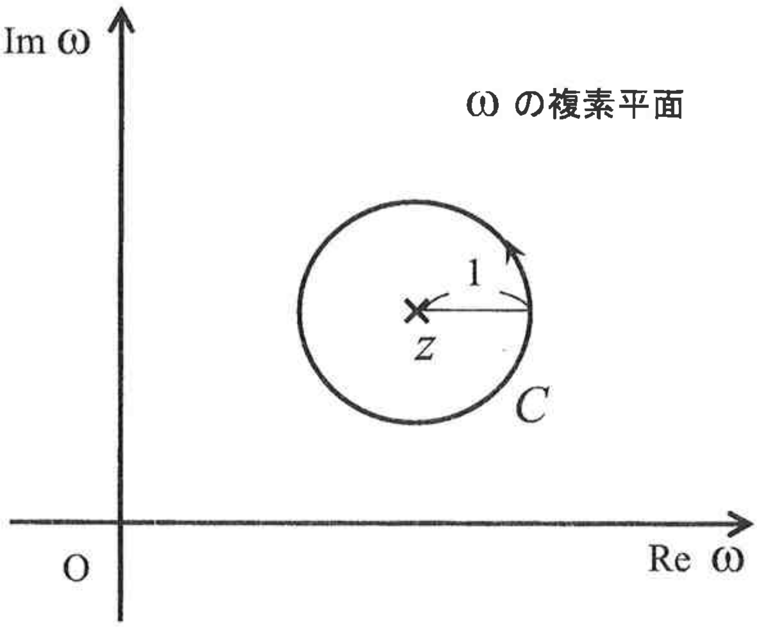

図 1: 積分経路 C.