平成２１年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　学

平成２０年８月２５日（月）　１０時００分〜１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第 1 問

1. 実変数 θ に依存する 2 行 2 列の実対称行列

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos\theta + 3\sin\theta & -\sqrt{3}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \\ -\sqrt{3}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta & 3\cos\theta + \sin\theta \end{pmatrix}$$

に対し、次の問に答えよ。なお θ の範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるとする。

(i) 行列 A の 2 つの固有値を求めよ。

(ii) A の対角成分の和 $\mathrm{Tr}\,A$ の 3 乗 $(\mathrm{Tr}\,A)^3$ と A^3 の対角成分の和 $\mathrm{Tr}\,(A^3)$ の差を θ の関数として

$$f(\theta) = (\mathrm{Tr}\,A)^3 - \mathrm{Tr}\,(A^3)$$

と置くとき、$f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

(iii) I を単位行列とするとき、A の多項式から作られる行列

$$B = A^4 - A^2 + A + (\cos^2\theta\sin^2\theta - 1)I$$

が逆行列を持たないような θ の値を求めよ。

(iv) B が逆行列 B^{-1} を持つとき、B^{-1} を行列 A の 1 次式、すなわち係数 $a_1(\theta)$, $a_0(\theta)$ を用いて $B^{-1} = a_1(\theta)A + a_0(\theta)I$ の形に表せ。

2. N 行 N 列の実対称行列 X の全ての固有値 λ_i $(i = 1, \ldots, N)$ が非負 $\lambda_i \geq 0$ であるとする。

(i) 任意の自然数 n に対して不等式

$$(\mathrm{Tr}\,X)^n \geq \mathrm{Tr}\,(X^n)$$

が成り立つことを証明せよ。

(ii) 上の不等式で等号 $(\mathrm{Tr}\,X)^n = \mathrm{Tr}\,(X^n)$ が成立するのは、固有値 λ_i がどのような場合に限られるか。ただし $n \geq 2$ とする。

第２問

実変数 t の関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ が次の連立１階常微分方程式を満たす。

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

ただし $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ は t の実関数であり、$i=\sqrt{-1}$ とする。

1. $|f_1(t)|^2+|f_2(t)|^2$ が t に依存しないことを示せ。

2. $f_1(t)=e^{-i\int_0^t a(\tau)d\tau}\tilde{f}_1(t)$, $f_2(t)=e^{-i\int_0^t c(\tau)d\tau}\tilde{f}_2(t)$ によって $\tilde{f}_1(t)$ と $\tilde{f}_2(t)$ を定義すると、これらが
$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}(t) \\ \tilde{b}(t)^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix}$$
という形の常微分方程式を満たすことを示せ。またこのときの $\tilde{b}(t)$ の表式を求めよ。ただし $\tilde{b}(t)^*$ は $\tilde{b}(t)$ の複素共役を表す。

3. $a(t)=c(t)=0$ であり、$b(t)$ が定数 b_0 であるとする。式 (1) の解 $f_1(t)$ を、b_0 および $f_1(0)$, $f_2(0)$ を用いて表せ。

4. $a(t)=c(t)=0$ であり、$b(t)$ は $t\to-\infty$ で十分はやく減衰する関数であるとする。このとき、式 (1) の解 $f_1(t)$ を、$b(t)$ および $f_1(-\infty)$, $f_2(-\infty)$ を用いて表せ。ただし $f_1(-\infty)=\lim_{t\to-\infty} f_1(t)$ などである。

5. 設問４で、$b(t)$ が正の定数 β, ω, t_0 を用いて
$$b(t)=\frac{\beta\cos\omega t}{t^2+t_0^2}$$
で与えられる場合を考える。$f_1(-\infty)=1$, $f_2(-\infty)=0$ のとき、$|f_1(+\infty)|^2$, $|f_2(+\infty)|^2$ の値を求めよ。