平成２２年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２１年８月２４日（月）　１０時００分～１１時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3．問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4．答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。
5．各答案用紙の所定欄に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6．解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7．答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10．答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

A は n 行 n 列の実対称行列で, その固有値はすべて正とする。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ は n 行1列の実数値をとる縦ベクトルとする。$\boldsymbol{x}$ に関する線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ を求めたい。 任意の初期ベクトル $\boldsymbol{x}^{(0)}$ から始めて, $\boldsymbol{x}^{(0)} \to \boldsymbol{x}^{(1)} \to \boldsymbol{x}^{(2)} \to \cdots \to \bar{\boldsymbol{x}}$ のような逐次的なステップにより $\bar{\boldsymbol{x}}$ を探索する手続きを考える。n 行1列の実数値をとる任意の縦ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, その大きさを表す二種類のノルムとして, $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}}$ と $\|\boldsymbol{y}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}A\boldsymbol{y}}$ を定義する。ここで, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}$ は $\boldsymbol{y}$ の転置ベクトルを表す。以下の設問に答えよ。

(i) 線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ は, 次の量

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

の最小値で与えられる事を示せ。 ここで, x_i と b_i はそれぞれ, 縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ の i 番目の成分を表す。 また, A_{ij} は行列 A の (i,j) 成分を表す。

(ii) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与えるベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}$ を探索する時に, m 回後のステップのベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)}$ から $(m+1)$ 回後のステップのベクトル $\boldsymbol{x}^{(m+1)}$ を次の手順で求める。まず, 適当な実数パラメーター α を選び, $\boldsymbol{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{x}^{(m)} + \alpha\boldsymbol{r}$ とおく。 ここで, 探索方向ベクトル $\boldsymbol{r}$ は, その成分を $r_i = -\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(m)}}$ として, $f(\boldsymbol{x})$ の勾配ベクトルと反対方向にとる。このとき, $\boldsymbol{r} = -A(\boldsymbol{x}^{(m)} - \bar{\boldsymbol{x}})$ であることを示せ。

(iii) 一回のステップで $f(\boldsymbol{x})$ が最も大きく減少するようにパラメーター α を選ぶ。このとき, α を $\|\boldsymbol{r}\|$ と $\|\boldsymbol{r}\|_A$ を用いて表せ。

(iv) $\boldsymbol{x}^{(m)}$ の $\bar{\boldsymbol{x}}$ からのズレを $\delta\boldsymbol{x}^{(m)} = \boldsymbol{x}^{(m)} - \bar{\boldsymbol{x}}$ とする。このとき, $\|\delta\boldsymbol{x}^{(m+1)}\|_A$ を $\|\delta\boldsymbol{x}^{(m)}\|_A$, $\|\boldsymbol{r}\|$ および $\|\boldsymbol{r}\|_A$ を用いて表せ。

(v) A の n 個の固有値を λ_i, 対応する規格直交化された固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする。さらに, $\delta\boldsymbol{x}^{(m)}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ による展開を $\delta\boldsymbol{x}^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \boldsymbol{a}_i$ とする。このとき, ノルムの変化, $R = \frac{\|\delta\boldsymbol{x}^{(m+1)}\|_A}{\|\delta\boldsymbol{x}^{(m)}\|_A}$, を固有値 λ_i と展開係数 ρ_i を用いて表せ。

(vi) A を2行2列とし, その固有値の比 $p = \lambda_1/\lambda_2$ が $0 < p \leq 1$ を満たすとする。このとき, 設問 (v) の結果を用いて R に上限があることを示し, 任意の初期ベクトル $\boldsymbol{x}^{(0)}$ から始めた探索が必ず収束することを示せ。

第 2 問

以下の偏微分方程式を考える。

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

ここで v は正の定数であり, $u(x,t)$ は $-\infty < t < +\infty$ および $-\infty < x < +\infty$ で定義された二変数関数である。以下の設問に答えよ。

(i) 変数 $\xi = x + vt$ および $\eta = x - vt$ を用いて (1) 式を書き直せ。

(ii) (1) 式の一般解が, 適当な関数 f と g を用いて $u(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$ と表せることを示せ。

(iii) 任意の時間 t に対して, (1) 式の解が $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x\to\pm\infty} = 0$ を満たしているとする。このとき, 以下の積分 I が t に依存しないことを示せ。ただし, I は発散しないとする。

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx.$$

(iv) $u(x,t)$ の初期条件として, $u(x,0) = u_0(x)$, $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$ が与えられているとする。このとき, 設問 (ii) の結果を利用して, 解 $u(x,t)$ を u_0 と u_1 を用いて表せ。

(v) $u_0(x) = 0$ および $u_1(x) = \frac{v^2}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}$ なる初期条件のもとで, $t > 0$ での解 $u(x,t)$ を求めよ。ここで, a と b は正の定数とする。

(vi) $b \to 0$ なる極限の場合に, 設問 (v) で求めた解 $u(x,t)$ を図示せよ。