

平成22年度東京大学大学院理学系研究科  
物理学専攻修士課程入学試験問題

# 物 理 学

平成21年8月24日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。



| 物理量        | 記号, 数式                                 | 数値                                    |
|------------|--|---------------------------------------|
| 光速度        | $c$                                    | $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$         |
| プランク定数     | $h = 2\pi\hbar$                        | $6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$     |
|            | $\hbar$                                | $1.1 \times 10^{-34} \text{ J s}$     |
| ボルツマン定数    | $k_B$                                  | $1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$     |
| 電子の静止質量    | $m_e$                                  | $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$      |
| 陽子の静止質量    | $m_p$                                  | $1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$      |
| 電子の静止エネルギー | $m_e c^2$                              | 0.51 MeV                              |
| 陽子の静止エネルギー | $m_p c^2$                              | 0.94 GeV                              |
| 電荷素量       | $e$                                    | $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$       |
| 真空の誘電率     | $\epsilon_0$                           |                                       |
|            | $1/(4\pi\epsilon_0)$                   | $9.0 \times 10^9 \text{ J m/C}^2$     |
| 微細構造定数     | $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ | 1/137                                 |
| アボガドロ数     | $N_A$                                  | $6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ |

以下の問題では, この表中の表式および数値を適宜用いてよい。

## 第1問

ポテンシャル

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq -L) \\ 0 & (-L < x < L) \\ \infty & (x \geq L) \end{cases}$$

に閉じ込められている質量  $m$  の粒子の1次元運動を考える。このとき、次の設問に答えよ。答えだけでなく、途中の考え方も述べよ。

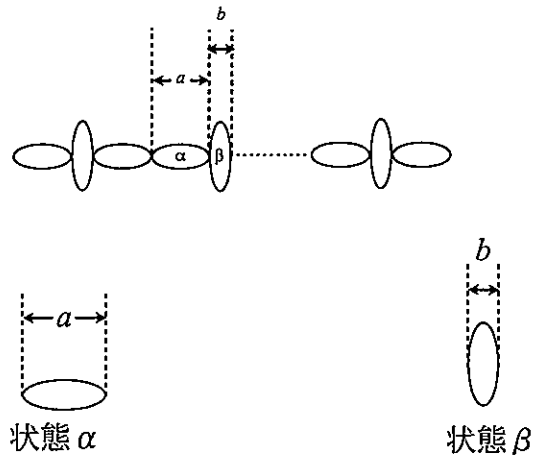
1. この粒子のすべてのエネルギー固有値と、それらに対応する1に規格化された波動関数を求めよ。
2. 設問1で求めたエネルギー固有値の最小値がゼロでない値をとる物理的理由を説明せよ。

次に、 $V_0(x)$  にデルタ関数型のポテンシャルを加えたポテンシャル  $V_0(x) + V_1\delta(x)$  中の粒子に関して以下の設問に答えよ。ただし、 $V_1 > 0$  とする。

3. 基底状態のエネルギーを  $V_1$  の1次まで求めよ。
4. 第1励起状態のエネルギーを求めよ。
5. 基底状態と第1励起状態の波動関数の概略をそれぞれ図示せよ。
6.  $V_1$  をゼロから無限大まで増加させるとき、基底状態と第1励起状態のエネルギーが  $V_1$  の関数としてどのように変化するかの概略を図示せよ。

## 第2問

図のように  $N$  個の単量体が連結された直線的な鎖状分子を考える。各単量体は図のように自由に変形し、長さ  $a$  の状態  $\alpha$  か長さ  $b$  の状態  $\beta$  のいずれかを、隣りあう単量体とは独立にとることができる。ただし、 $a > b$  とする。また、各単量体の2つの状態  $\alpha, \beta$  が持つエネルギーは、 $f$  を定数として、それぞれ  $-fa, -fb$  であるとする。すなわち、鎖状分子の全長を  $L$  とすると、全エネルギーは  $E = -fL$  となる。ただし、設問6以外では  $f > 0$  とする。



- 鎖状分子が、与えられた全エネルギーについてのミクロカノニカル分布に従う状態にあると考える。状態  $\alpha$  をとる単量体が  $N_\alpha$  個、状態  $\beta$  をとる単量体が  $N_\beta$  個とする。ただし、 $N_\alpha + N_\beta = N$  である。このとき、鎖状分子のエントロピー  $S$  をボルツマン定数  $k_B$  および  $N_\alpha, N_\beta$  を用いて表せ。

以下では、単量体の個数  $N$  が大きい極限を考える。単量体1個あたりの物理量は、この極限で一定値に収束する。これ以降の設問に対しては、 $N$  によらない形で答えること。

- 設問1と同じミクロカノニカル分布について、単量体1個あたりのエネルギー  $\epsilon = E/N$  の関数として、単量体1個あたりのエントロピー  $s = S/N$  を求め、グラフの概形を図示せよ。なお、大きな整数  $M \gg 1$  に対して成立する Stirling の公式  $\log M! \sim M \log M - M$  を用いてもよい。ここで  $\log x$  は  $x$  の自然対数を意味する。

以下では、鎖状分子が温度  $T$  の熱平衡状態にあるとする。

- 絶対零度および温度無限大それぞれの場合について、鎖状分子の単量体1個あたりのエントロピー  $s$  を求めよ。
- 温度  $T$  を与えたとき、鎖状分子の単量体1個あたりの長さは  $T$  の関数  $l(T)$  となる。温度の上昇とともに、鎖状分子の長さは増大するか減少するか、その物理的理由とともに答えよ。また、 $l(T=0)$  と  $l(T=\infty)$  の値を求めよ。

5. この系の、温度  $T$  における単量体 1 個あたりの熱容量を  $c(T)$  とする。積分

$$\int_0^{\infty} \frac{c(T)}{T} dT$$

の値を求めよ。

6. 単量体の 2 つの状態  $\alpha, \beta$  の持つエネルギーが等しい、すなわち  $f = 0$  のとき、鎖状分子の単量体 1 個あたりの長さを求めよ。

### 第3問

Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t), & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、電束密度  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 、磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 、磁場  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 、電荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、電流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  である。また、以下のベクトル公式を必要に応じて用いてよい。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X}\end{aligned}$$

1. 電場の角振動数  $\omega$  で変化する成分を、複素振幅  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を用いて  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  と表すと、その実部が実際の場に対応する。ただし、 $i$  は虚数単位である。他の物理量に対してもこのような表式を用いて、Maxwell 方程式を時間微分を含まない複素振幅の方程式に書き直せ。

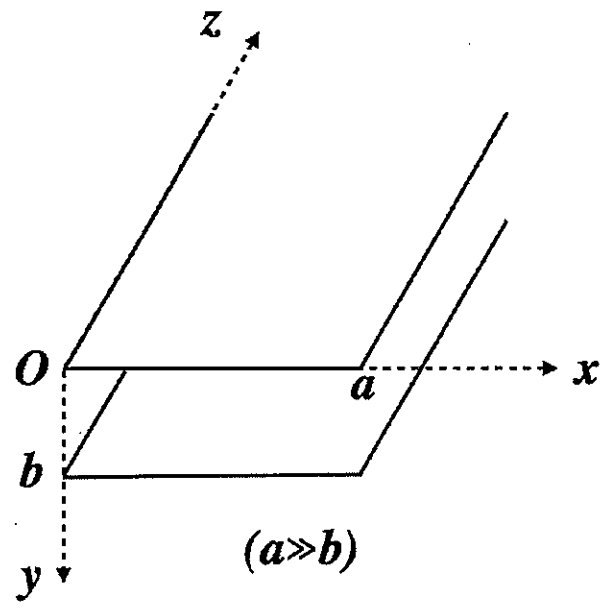
以降、電場と電束密度、磁場と磁束密度の関係が  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$  と書けるとする。ただし、誘電率  $\epsilon (> 0)$  および透磁率  $\mu (> 0)$  は実数の定数とする。

2. 複素振幅  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  がそれぞれ満たす方程式を  $\rho(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  を用いて表せ。ただし、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の方程式は  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  を含まず、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  の方程式は  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を含まない形にせよ。
3.  $\rho(\mathbf{r}) = 0$  かつ  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$  の場合を考える。ただし、電気伝導度  $\sigma (\geq 0)$  は実数の定数であるとする。このとき、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  の解の一つとして、 $x, y$  によらない

$$\mathbf{E}(z) = E_0 e^{ikz}, \quad \mathbf{H}(z) = H_0 e^{ikz}$$

の組み合わせを考える。 $E_0, H_0$  は、 $x, y, z$  によらない複素ベクトルである。このとき、 $z$  方向の単位ベクトルを  $s$  として、 $E_0 \perp s, H_0 \perp s, E_0 \perp H_0$  を示せ。

4. 設問3で  $\sigma = 0$  の場合、位相速度および  $\mathbf{E}(z)$  と  $\mathbf{H}(z)$  の振幅の比  $|\mathbf{E}|/|\mathbf{H}|$  を  $\epsilon, \mu$  を用いて表せ。また、 $\sigma \neq 0$  の場合、電磁場の振る舞いが  $\sigma = 0$  の場合と比べてどのように異なるかを説明せよ。
5. 図のように、幅  $a$  で  $z$  方向には無限遠まで続く2枚の完全導体が真空中で狭い間隔  $b (a \gg b)$  で対向した平行平板線路を考える。この2枚の導体間に設問3で与えた電場、磁場が存在し、それ以外の部分では電場、磁場の振幅がゼロであるとする。このとき、境界条件に注意して、導体間の電場、磁場の方向を示せ。
6. 設問5の場合、2枚の導体を流れる電流の  $z$  依存性を説明せよ。
7. 設問5の場合、任意の  $z = z_0$  における2枚の導体間の電位差と導体を流れる電流の大きさの比を求めよ。



平行平板線路



第4問

静止質量  $M_A$ 、運動量の大きさ  $P_0$  の粒子 A と、静止質量  $M_B$  の静止した粒子 B との弾性衝突を考える。図に示すように、衝突後の粒子 A および粒子 B の運動量の大きさをそれぞれ  $P_A$  および  $P_B$ 、散乱角度および反跳角度をそれぞれ  $\phi$  および  $\theta$  として、以下の設問に答えよ。必要であれば、この問題冊子の先頭に付いている表中の表式および数値を用いてよい。



1. 衝突前の粒子 A の運動エネルギー  $T$  および速さ  $v$  を、 $P_0$ 、 $M_A$ 、および光速  $c$  を用いて相対論的に表せ。また、運動エネルギー 20 MeV の陽子および電子の速さを光速を単位にしてそれぞれ有効数字 1 桁で求めよ。

以下の設問は、非相対論的衝突 ( $P_0 \ll M_A c$ ) として答えよ。

2. 衝突の前後でのエネルギー保存則、および運動量保存則を書き下し、 $P_B$  を  $\theta$  の関数として表せ。また、 $P_B$  と  $\theta$  の関係を図示せよ。ただし、 $P_B$  の最大値と  $\theta$  のとりうる範囲に留意せよ。
3. 運動エネルギー 20 MeV の陽子が静止した電子に衝突する場合、電子に与えられる運動エネルギーの最大値を有効数字 1 桁で求めよ。また、水素原子を電離するエネルギーに比べて、この値が何倍かを有効数字 1 桁で答えよ。

電荷  $ze$  の荷電粒子が、原子番号  $Z$ 、原子量  $X$  の単原子で構成される、厚さ  $\Delta t$  の薄い物質を通過する過程を考える。このとき荷電粒子は物質中の電子との衝突によりエネルギーを失う。荷電粒子の運動量は、電子との衝突による運動量変化に比べて十分に大きいとして、以下の設問に答えよ。

4. 荷電粒子と電子との衝突をラザフォード散乱で考えよう。この場合、衝突による荷電粒子の運動量変化  $q$  に対する微分散乱断面積は、 $\frac{d\sigma}{dq} = 8\pi \frac{z^2 \alpha^2 \hbar^2}{\beta^2 q^3}$  と表される。ここで、 $\alpha$  は微細構造定数、 $\beta$  は光速を単位とした衝突前の荷電粒子と電子との相対速度の大きさである。衝突前に電子が静止しているとみなせる場合、衝突により荷電粒子が電子に与えるエネルギー  $E$  に対する微分散乱断面積  $\frac{d\sigma}{dE}$  の表式を求めよ。
5. この物質が単位体積あたり  $N_e$  個の電子を含むとすると、電子に与えられるエネルギーが微小区間  $[E, E + dE]$  の範囲になる衝突が起こる確率は、 $N_e \Delta t \frac{d\sigma}{dE} dE$  となる。このことに着目し、物質の通過によって荷電粒子が失うエネルギーの期待値  $\Delta E$  を求めよ。ただし、荷電粒子が 1 回の衝突によって電子に与えるエネルギーの最大値を  $E_{\max}$ 、最小値を  $E_{\min}$  とする。
6. 設問 5 で用いた  $E_{\min}$  は、どの程度の大きさか、物理的な理由を含めて、2~3 行以内で述べよ。

第5問

I 気体の圧力の測定は様々な物理実験で必要となるが、比較的高真空でよく用いられる圧力の測定装置に電離真空計がある。電離真空計では、真空槽とつながった真空計内の気体分子と、高温の金属フィラメントの表面から放出された電子(以下、熱電子と呼ぶ)とが衝突することで生じるイオン電流を通して、気体の圧力を計測することができる。その構造は図1の模式図に示すように、フィラメント、及びグリッド、コレクタと呼ばれる電極からなる。 $V_F$ 、 $V_G$ 、 $V_C$ は定電圧電源、Aは電流計である。このとき以下の設問に答えよ。

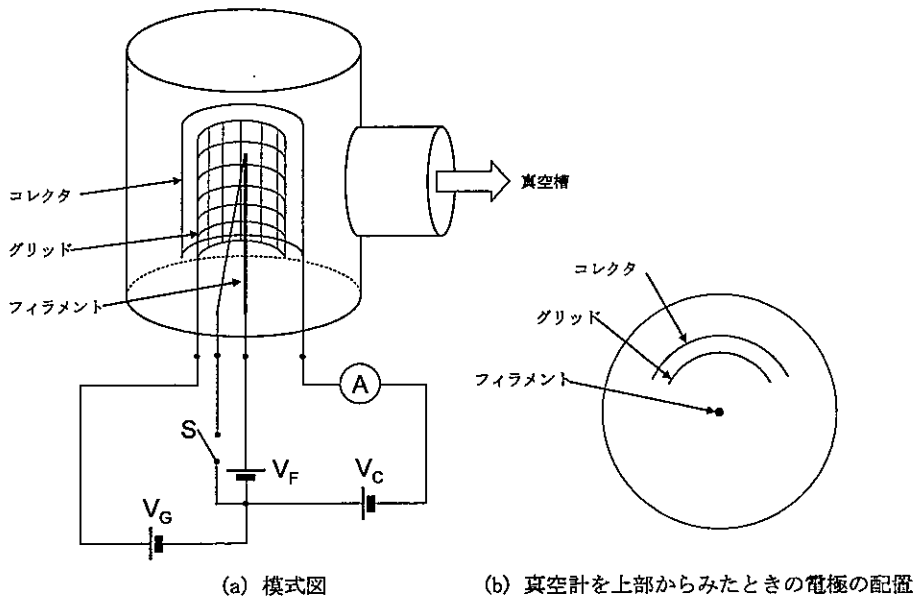


図1: 電離真空計の模式図

1. 電離真空計中の気体の密度を  $n$  とする。この気体分子が1個の熱電子との衝突によってイオン化される際のイオン化断面積を  $\sigma$ 、熱電子が飛行する実効的な距離を  $L$  とすると、熱電子1個あたりのイオン化確率は  $\sigma n L$  である。簡単のため  $\sigma$  は電子の運動エネルギーによらず一定であるとする。また、熱電子は一度気体分子と衝突するとその後はイオン化には寄与しなくなるものとし、イオン化された分子は全て電流に寄与しイオン電流  $I_i$  として電流計 A で計測されるとする。このとき気体の圧力  $p$  を、気体の温度  $T$ 、熱電子の電流  $I_e$ 、イオン電流  $I_i$  などを用いて表せ。
2. 電離真空計中の電子とイオンの運動を考察することにより、図1中の電源  $V_G$  の役割を述べよ。また、一般にコレクタの電位は電源  $V_C$  によって、金属フィラメントの電位より低く設定されるが、その理由を述べよ。
3. 電離真空計を使う場合には、金属フィラメントを加熱するためのスイッチ S を閉じてから数分たち、真空計が安定してから使用する。スイッチを閉じてから安定するまでの間、金属フィラメントに流れる電流はどのように時間変化すると予想されるか。概略を図示し、その特徴的振る舞いの物理的理由を答えよ。ただし、回路のキャパシタンスやインダクタンスの影響は考えなくてよい。

II 次に金属フィラメント（以下，単に金属と呼ぶ）における熱電子放出について考えることにしよう。金属中の電子を質量  $m$  の自由電子とみなし，エネルギー  $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$  をもつ電子の分布関数はフェルミ・ディラック分布であるとする。また，金属外部のポテンシャルは  $U (> 0)$  とする。このとき，金属表面に垂直な方向を  $x$  軸にとり，金属中の電子のうち運動量  $p_x$  が， $p_x \geq p_0 (> 0)$ ， $p_0^2/2m = U$  を満たすものが金属外部に飛び出すことができると仮定する。以下，金属中の電子の化学ポテンシャルを  $\mu$  として， $\phi = U - \mu$  を仕事関数と呼ぶ。

4. 実際の電離真空計では，金属から飛び出すことができる電子のエネルギーの分布関数は，ボルツマン分布で近似することができる。その理由を述べよ。
5. 設問 4 の場合，単位時間あたりに金属から外部に飛び出すことができる電子の数は

$$T^2 \exp(-\phi/k_B T)$$

に比例する。単位時間あたりに金属内部から金属表面に到達する電子の数を考えることにより，この結果を導け。ただし化学ポテンシャルの温度依存性は無視できるものとする。

6. 実際にタングステンを熱電子放出源として用い，単位面積から放出される熱電子による電流  $j_e$  と温度  $T$  を測った。実験結果を， $j_e/T^2$  [ $\text{Am}^{-2}\text{K}^{-2}$ ] の対数を縦軸， $1/T$  [ $10^{-4}\text{K}^{-1}$ ] を横軸にとりプロットしたら図 2 のようになった。実線は直線によるフィッティングである。この結果から，タングステンの仕事関数  $\phi$  を eV の単位で推定せよ。有効数字は 1 桁でよい。また， $e$  を底として  $\log_{10} = 2.3$  としてよい。必要であれば，この問題冊子の先頭に付いている表中の表式および数値を用いてよい。

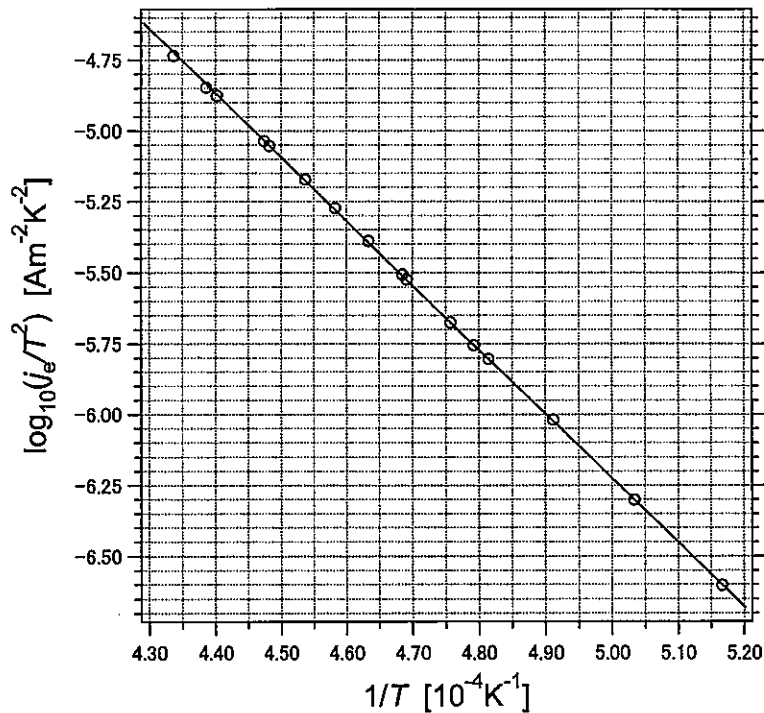


図 2:

第6問

エレクトロニクス技術は物理学実験の重要な基本要素である。以下のデジタル回路（設問1～3）およびアナログ回路（設問4～6）に関する設問に答えよ。

I. デジタル回路

1. デジタル回路では論理回路が使われる。図1にAND回路, OR回路, NAND回路, NOR回路, NOT回路の記号と真理値表を示す。いま, 図2に示す2入力の論理回路を構成したとき, その真理値表を図1にならって作れ。

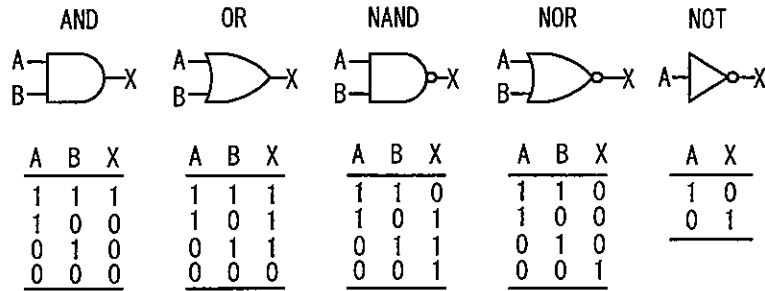


図1: 論理回路と真理値表。1がHighレベル, 0がLowレベルを示す。

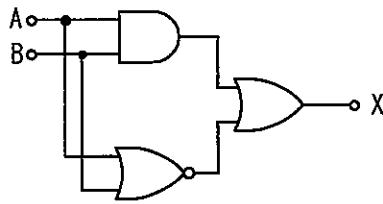


図2: 2つの入力(A, B)をもつ論理回路。Xが出力。

2. 図3(a)はRSフリップフロップと呼ばれる回路である。そのR入力, S入力に図3(b)のようなパルス信号を加える。図3(b)のaのタイミングでは, R入力, S入力ともに0であり, Q出力,  $\bar{Q}$ 出力はそれぞれ0, 1となっているとする。その後, b, c, d, eでのQ出力,  $\bar{Q}$ 出力はどうなるか, それぞれ答えよ。

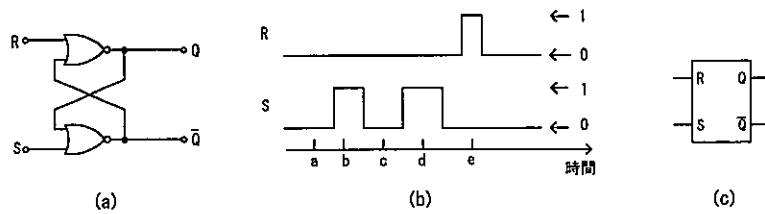


図3: (a) RSフリップフロップ。(b) タイミングチャート。(c) RSフリップフロップの記号。

3. 図4は、リセットした時間から測って、2つプッシュスイッチ (A, B) のどちらが先に押されたかを、発光ダイオード (LED) を点灯させて表示する装置の回路である (早押しボタン)。プッシュスイッチは押されたときだけ ON になるスイッチである。もし、A が先に押された場合、LED-A のみが点灯し、その後リセットするまで A, B がどのように押されても変化しない。もし、B が先に押された場合、LED-B のみが同様に点灯する。また、リセットスイッチを押すことにより、点灯した LED が消えて最初の状態に戻る。このような動作をするように、図4の点線の四角で囲った部分を図1の論理回路と RS フリップフロップを用いて構成し、その回路図を示せ。答案の回路図には端子 1 - 5 を明示せよ。

なお、回路図では、RS フリップフロップは1つの論理回路とみなし図3(c)の記号を用いよ。論理回路と RS フリップフロップは何個使ってもよい。LED-A, LED-B はそれぞれ回路図の端子 3, 4 が1の電圧になったときに点灯する。また、応答に遅れはなく、A と B のプッシュスイッチがまったく同じ時間に OFF から ON になることはないとする。

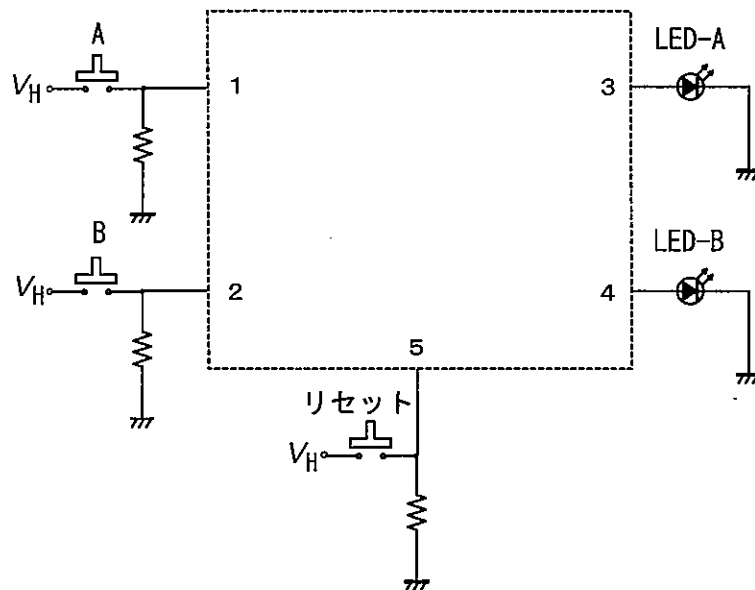


図4: 早押しボタン回路。 $V_H$  には“1”に相当する電圧がかかっている。

## II. アナログ回路

4. アナログ信号の増幅にはオペアンプがよく用いられる。オペアンプは図5(a)に示すように2つの入力端子 (+, -) をもち、その電圧の差を  $G$  倍して出力する集積回路である。入力端子 (+, -) に加わる電圧をそれぞれ  $V_+$ ,  $V_-$  とすると、接地電位から測った出力電圧  $V_{out}$  は  $V_{out} = G(V_+ - V_-)$  で与えられる。 $G$  をオープンループゲインと言う。いま、図5(b), (c) のような反転増幅回路と非反転増幅回路を構成したとき、それぞれの回路の直流増幅率 ( $V_{out}/V_{in}$ ) を抵抗  $R_1$ ,  $R_2$  および  $G$  を用いて表せ。また、 $G$  が無限大である場合について、それぞれの直流増幅率を求めよ。ただし、オペアンプの入力端子に電流は流れ込まないと考えてよい。

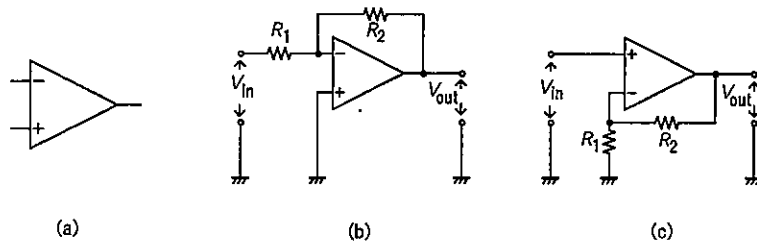


図 5: (a) オペアンプ。(b) 反転増幅回路。(c) 非反転増幅回路。

5. 光の入射により抵抗 ( $R_M$ ) が減少する光検出素子 M がある。図 6 はこの光検出素子 M に定電流を流し、その両端に生じた電圧を読み取る回路である。出力電圧  $V_{out}$  が光の強度を反映する。この回路で、A1, A2 はオペアンプであり、DA は 1 と 2 の入力電圧差 ((1 の電圧)-(2 の電圧)) を 100 倍して 3 に出力する集積回路 (差動増幅器) である。A1 と DA により定電流回路を構成している、設定電圧  $V_S$  を変えることにより素子 M に流す電流  $I$  を調整できるようになっている。このとき、 $V_S$  と  $I$  の関係を求めよ。また、A1 のオープンループゲインが無敵大であるとき、 $V_S$  と  $I$  の関係が光検出素子 M の抵抗 ( $R_M$ ) に依存しないことを示せ。ただし、A1, A2, DA の入力端子に電流は流れ込まないと考えてよい。

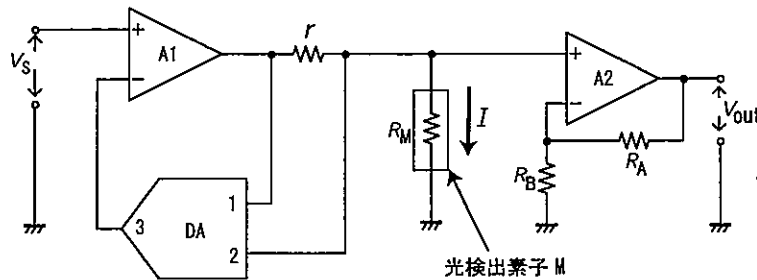


図 6: 光検出素子 M に定電流を流し、その両端に生じる電圧を読み取る回路。

6. 設問 5 で、光検出素子の抵抗は、入射する光の強度が 0 から最大値まで変化するとき、 $100 \Omega$  から  $10 \Omega$  まで変化するとする。図 6 の回路で、設定電圧  $V_S$  が  $1 \text{ V}$  のとき、光検出素子 M に  $1 \text{ mA}$  の電流を流せるようにし、光の強度が 0 の場合の出力電圧  $V_{out}$  が  $3 \text{ V}$  になるようにしたい。この場合、抵抗  $r, R_A, R_B$  をどのような値に設定すればよいか、実際に実験する場合を考えて具体的な値の例を答えよ。ただし、A1 と A2 のオープンループゲインは無敵大とする。