平成２３年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　学

平成２２年８月２３日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3．問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4．答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。
5．各答案用紙の所定欄に**科目名(数学)**、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
6．解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7．答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10．答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

A, B は n 行 n 列の複素行列であり，$A^2 = B^2 = E$, $AB + BA = O$ を満たすものとする。ただし，E は単位行列，O は全ての成分が 0 に等しい零行列である。また，行列 C, D をそれぞれ $C = -iAB$, $D = A + iB$ によって定義する。i は虚数単位である。このとき，以下の設問に答えよ。

(1) 行列 A の固有値の取り得る値を全て求めよ。

(2) $C^2 = E$ となること，また $BC + CB = CA + AC = O$ となることを示せ。

(3) $D^2 = O$ かつ $D \neq O$ となることを示せ。

(4) 設問 (3) の結果により，$D\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ (ただし $\boldsymbol{0}$ は零ベクトル) となる縦ベクトル $\boldsymbol{r}$ が存在する。ここで $\boldsymbol{p} = D\boldsymbol{r}$ によりベクトル $\boldsymbol{p}$ を定義すると，$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $D\boldsymbol{p} = D^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ をみたす。また $\boldsymbol{p}$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{q}$ を，$\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}(A - iB)\boldsymbol{p}$ によって定義する。

(i) ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は，ともに行列 C の固有ベクトルになっていることを示し，それぞれの固有値を求めよ。

(ii) ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は互いに線型独立であることを証明せよ。

(5) 以下では $n = 2$ とし，設問 (4) で定義した $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ が 2 次元縦ベクトルとなる場合を考える。

(i) $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を並べて作った 2 次元正方行列 $P = (\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q})$ は正則であることを，設問 (4) の結果を用いることによって示せ。

(ii) 行列 $P^{-1}CP$ を計算せよ。

(iii) 行列 $P^{-1}(A \pm iB)P$ を計算することによって，$P^{-1}AP$ および $P^{-1}BP$ を求めよ。

(6) $n = 2$ のとき，行列 A, B, C の具体形を一組与えよ。

第２問

以下ではポアソン方程式，またはラプラス方程式の解を様々な次元 (d), 境界条件の下で求める。

(1) まず 1 次元 $(d=1)$ の場合を考える。

(i) 領域 $x \in [0,1]$ で定義された連続関数 $u(x)$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\delta(x-y), \quad 0 < y < 1$$

を境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ の下で解け。ここで $\delta(x)$ はデルタ関数である。

(ii) 上で得られた解 $u(x)$ を $G(x,y)$ と書く。このとき領域 $x \in [0,1]$ で定義される，より一般的な微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \rho(x)$$

の解 $v(x)$ を $G(x,y)$ を用いて書き下せ。ただし境界条件は $v(0) = v(1) = 0$ とし，右辺の $\rho(x)$ は $\rho(0) = \rho(1) = 0$ を満たす任意関数とする。

(2) 次に 2 次元 $(d=2)$ の場合を考える。2 次元平面の直交座標を (x,y)，複素座標を $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, 極座標を r, θ $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ とする。

(i) 単位円の内部 $(r<1)$ で定義された関数 $u_n(x,y) = z^n + \bar{z}^n$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ はラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = 0$$

の解であることを示せ。またこの関数は境界 $(r=1)$ でどのような値をとるのか，θ の関数として表せ。

(ii) 単位円の内部 $r<1$ でラプラス方程式を満たし，境界条件

$$u(x,y)\Big|_{r=1} = |\theta|, \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

を満たす関数 u を，境界値に対するフーリエ級数展開を用いて求めよ。

(3) d 次元 ($d \geq 3$) ポアソン方程式

$$\nabla \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) = -\prod_{a=1}^{d} \delta(x_a), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d),\ \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$$

を，定義域 $\mathbf{R}^d$，境界条件 $\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} u(\boldsymbol{x}) = 0$ の下で考える。発散定理

$$\int_V d^d x \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \int_{\partial V} dS\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F}$$

を用いて解 $u(\boldsymbol{x})$ を求めよ。ここで V は $\mathbf{R}^d$ 内のなめらかな境界 ∂V を持つ有界な領域，$\boldsymbol{F}$ はベクトル値関数，$\boldsymbol{n}$ は ∂V 上の単位法線ベクトル，dS は ∂V の超面積要素である。(必要であれば d 次元空間内の半径 1 の超球面 $\sum_{i=1}^{d}(x_i)^2 = 1$ の超面積が $\dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ であることを用いても良い。ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数である。)