平成２４年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物　理　学

平成２３年８月２２日（月）　１３時００分～１７時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3．問題は全部で６問ある。第１問、第２問、第３問は全員解答すること。さらに第４問、第５問、第６問の中から１問を選んで解答せよ。
4．答案用紙は各問につき１枚、合計４枚配付されていることを確かめること。
5．各答案用紙の所定欄に科目名（物理学）、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6．解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7．答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名（物理学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10．答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

磁場中での電子スピンの量子力学的運動について，以下の設問に答えよ。ここでは，ハミルトニアンとして磁場 $\boldsymbol{H}$ とスピン $\boldsymbol{S}$ の Zeeman 相互作用

$$\mathcal{H} = -\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{S} \tag{1}$$

を考える。ただし，μ はある定数である。

1. スピン $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ の各成分は，軌道角運動量と同じ交換関係を満たす。位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と運動量 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ の各成分間の交換関係 $[x, p_x] = i\hbar$ などを用いて，軌道角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ の成分 (L_x, L_y, L_z) の間の交換関係を求めよ。
   ただし，$\hbar$ =(Planck 定数)/(2π) である。

2. 電子スピンの大きさは 1/2 であるので，スピンの各成分を表わす演算子は 2×2 の行列で表現できる。ここで

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   とするとき，S_y を表す行列を求めよ。

ハミルトニアン (1) において，磁場 $\boldsymbol{H}$ の方向は x 軸に平行で $\boldsymbol{H} = (H, 0, 0)$ の場合を考える。以下の設問 3〜6 では $\hbar = 1$ とする。

3. ハミルトニアン (1) を行列表示し，その固有値 λ_j と固有ベクトル $|\lambda_j\rangle$, $(j = 1, 2)$ を求めよ。（磁場の方向が x 軸に平行であることに注意）

4. ハミルトニアン (1) で表される系の時刻 t での状態ベクトルを $|\phi(t)\rangle$ とし，その時間発展を調べる。初期状態として，$t = 0$ でスピンが z 方向を向いていたとする。つまり，この状態でのスピンの各成分の期待値は

$$\langle\phi(0)|S_x|\phi(0)\rangle = \langle\phi(0)|S_y|\phi(0)\rangle = 0, \quad \langle\phi(0)|S_z|\phi(0)\rangle = \frac{1}{2}$$

   である。その後の状態ベクトル $|\phi(t)\rangle$ を t の関数として求めよ。また，時刻 t でのスピンの期待値 $(\langle\phi(t)|S_x|\phi(t)\rangle, \langle\phi(t)|S_y|\phi(t)\rangle, \langle\phi(t)|S_z|\phi(t)\rangle)$ を求めよ。

次に，ハミルトニアン (1) において，磁場が回転磁場 $\boldsymbol{H} = (H_0 \cos\omega t, -H_0 \sin\omega t, H)$ で与えられる場合を考える。以下では，$a \equiv \mu H$，$a_0 \equiv \mu H_0$ とおく。

5. ハミルトニアン (1) を

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 = -aS_z, \quad \mathcal{H}_2 = -a_0(S_x \cos\omega t - S_y \sin\omega t)$$

   と2つの部分に分けて考える。$\mathcal{H}_1$ による運動を取り込んだ相互作用表示での状態ベクトル $|\psi(t)\rangle = e^{i\mathcal{H}_1 t}|\varphi(t)\rangle$ の時間発展を与える方程式を記せ。ただし，$|\varphi(t)\rangle$ は，Schrödinger 表示での状態ベクトルである。

6. 特に，$\omega = a$ の場合を考える。初期状態として $t = 0$ でスピンが z 方向を向いていた場合，その後のスピンの z 成分の期待値 $\langle\varphi(t)|S_z|\varphi(t)\rangle$ を求めよ。

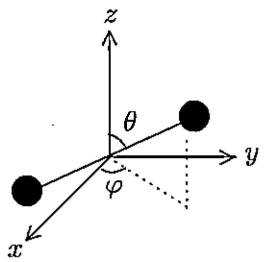
第2問

原子 2 個からなる分子の回転について以下の設問に答えよ。原子間隔は一定とする。分配関数，比熱，内部エネルギーは全て 1 分子あたりの量とする。Boltzmann 定数を k_B とし，記号 $\beta = 1/(k_B T)$ を用いてよい。

1. まず 2 原子分子を下図の様な剛体回転子として古典的に扱う。下図で θ, φ は 2 原子分子の向きを極座標表示した際の極角と方位角である。これらに共役な正準運動量を p_θ, p_φ とし，回転子の中心に対する慣性モーメントを I とすると，回転のエネルギー E は以下で与えられる。

$$E = \frac{1}{2I}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)$$

温度 T における回転運動の分配関数 Z を求めよ。計算の過程も示すこと。また比熱への回転運動の寄与 C を求めよ。



2. 次に量子論的に扱うと，エネルギー準位は以下で与えられる。

$$E_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1) \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

ただし $\hbar = (\text{Planck 定数})/(2\pi)$ である。E_ℓ の縮退度 $(2\ell+1)$ に注意して，温度 T における回転運動の分配関数 Z を表す式を与えよ。また，十分高温では Z が積分で近似できるとし，比熱への回転運動の寄与 C を求めよ。設問 1 の C の結果との関係を述べよ。

3. 十分低温での回転運動の比熱 C を温度 T の関数として近似的に求めよ。

具体的な 2 原子分子として水素分子を考えよう。水素原子核には核スピンがあり，水素分子にはオルソ水素とパラ水素という核スピン異性体が存在する。二つの水素原子核の合成スピンの大きさは，オルソ水素では 1，パラ水素では 0 である。また軌道部分の波動関数は，二つの水素原子核の入れ換えに関して式 (1) の ℓ が偶数のとき対称，奇数のとき反対称である。

4. オルソ水素とパラ水素の回転エネルギー準位として，式 (1) の E_ℓ でどのような ℓ の値が許されるか，理由と共に答えよ。

5. 十分高温の水素ガスにおけるオルソ水素分子の数 N_o とパラ水素分子の数 N_p の存在比 N_o/N_p はいくらか，理由と共に答えよ。

6. 水素分子の場合，慣性モーメント I は

$$\frac{\hbar^2}{2I} = k_B\Theta, \quad \Theta \simeq 90\,\mathrm{K}$$

で与えられる。十分高温で熱平衡にある水素ガスを急冷して 30 K にした。オルソ成分とパラ成分の間の遷移は遅いので，しばらくは設問 5 の存在比が保たれる。この状況での平均の内部エネルギーに対する回転運動の寄与を U とするとき，U/k_B を有効数字 2 桁で求めよ。

第3問

誘電体による光の分散の性質を考察するために，誘電体を構成する原子に束縛された電子を考える。電子には，変位に比例する復元力が働くものとする。いま，誘電体の外部から入射する光の電場を $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t$ と表す。電子の質量を m，電荷を e（< 0）とし，束縛電子の単振動の固有角振動数を ω_0 とする。また，電子の位置（変位）を $\boldsymbol{r}$，速度を $\boldsymbol{v}$ と書く。以下の設問に答えよ。

1. 電子の運動方程式を書き下せ。ただし，電子の自己力と磁場による Lorentz 力は無視してよい。

2. 設問 1 で求めた運動方程式の解が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} \cos \omega t$ で与えられるとし，振幅 $\boldsymbol{R}$ を決めた上で束縛電子による電流密度 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{d}} = Ne\boldsymbol{v}$ の表式を求めよ。ただし，N は単位体積あたりの電子数である。

3. 真空中の透磁率を μ_0，誘電率を ε_0 とし，磁束密度を $\boldsymbol{B}$ と書くとき，Ampère-Maxwell の法則を表す真空中の Maxwell 方程式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot} \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{i} \tag{1}$$

式 (1) が電荷保存則と矛盾しないことを示せ。

4. Ampère-Maxwell の法則を表す方程式 (1) は，電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t$，電流密度 $\boldsymbol{i} = 0$ の場合には，

$$\mathrm{rot} \boldsymbol{B} = -C\omega \boldsymbol{E}_0 \sin \omega t \tag{2}$$

の形に書ける。真空中では式 (2) 中の係数は $C = \varepsilon_0 \mu_0$ となる。一方，誘電体中では光の電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t$ に対する束縛電子の応答の効果として電流密度 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{d}}$が存在し，式 (1) 中の電流密度 $\boldsymbol{i}$ に寄与する。このとき，Ampère-Maxwell の法則を表す方程式を式 (2) と同じ形で表し，係数 C の具体的な表式を求めよ。

5. 設問 4 で求めた係数 C は，誘電体の誘電率 ε と透磁率 μ の積に対応する。このことに注意して，光の角振動数 ω の関数である誘電体の屈折率 $n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$ の表式を ω_0 とプラズマ特性振動数 $\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$ を用いて表せ。得られた表式は分散関係式と呼ばれる。

6. 太陽光を石英製のプリズム（可視光領域で $n(\omega) > 1$）を通して分光すると，そのスペクトルは光の振動数の順に，紫，藍，青，緑，黄，橙，赤のように並ぶことはよく知られている。一方，ある特殊な物質 F(注) でできたプリズムを通して分光したところ，そのスペクトルは振動数の順にならずに黄，橙，赤，紫，藍，青の順になった。答案用紙に次頁の図を書き写し，石英の分散曲線と物質 F の分散曲線の概略を，それぞれの場合の固有角振動数 ω_0 の位置が分かるように描け。

(注) 物質 F は，フクシンという染料の一種をエタノールに溶かしたもの。

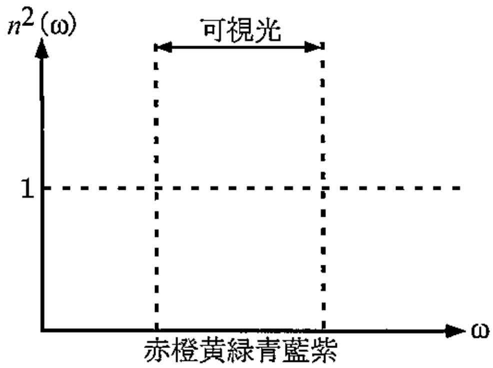


図 1: 石英の分散曲線

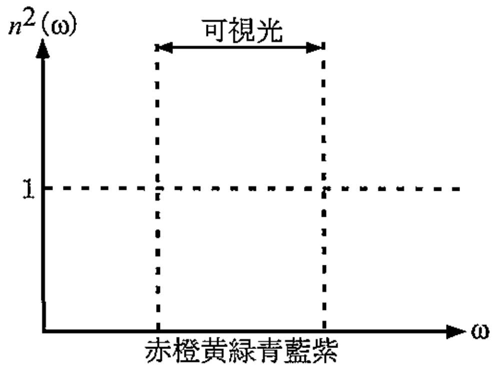


図 2: 物質 F の分散曲線

第4問

粒子加速器等でつくられた高エネルギーの陽子を標的に衝突させると，π 中間子や K 中間子などの様々な粒子を生成することができる。以下の設問に答えよ。ただし，c は光速とする。

1. 高エネルギー陽子を静止した水素標的に当てて，π^0 中間子を生成する $p+p \to p+p+\pi^0$ 反応を起こすために必要な入射陽子の運動エネルギーの最小値を，相対論的な運動学を用いて求めよ。陽子の質量を 938 MeV/c^2，π^0 の質量は 135 MeV/c^2 とする。

2. γ 線と物質との相互作用について，主なものを３つ挙げよ。さらに，そのうち π^0 中間子が崩壊してできる高エネルギーの γ 線の検出に特に重要なものはどれか答えよ。

生成された粒子の種類を同定するためには様々な方法がある。π^+ 中間子や K^+ 中間子などの荷電粒子の場合，磁場中を運動させたときの曲率から運動量を求め，さらに独立な測定で粒子の速度を求めて，その組み合わせにより粒子を識別する手法が一般的に利用される。

3. ある粒子が距離 $\ell = 1.200 \pm 0.012$ m を飛ぶのにかかった時間が $t = 5.000 \pm 0.120$ ns と測定された。ℓ と t の測定は独立と見なせるとして，この粒子の速さを誤差つきで示せ。

4. 相対論的な運動をする粒子が距離 ℓ を飛ぶのにかかる飛行時間 t を, 運動量 p, 質量 m, 光速 c, 距離 ℓ を用いて表せ。$pc \gg mc^2$ を用いて，運動量 4.0 GeV/c の π^+ (質量 140 MeV/c^2) と K^+ (質量 490 MeV/c^2) の飛行時間が 300 ps 以上異なるための ℓ の条件を求めよ。光速は $c = 3.0 \times 10^8$ m/s とし，有効数字２桁で解答すること。

π^+ や K^+ が崩壊して生成される μ^+ 粒子の寿命を，図１に示す装置で測ることを考える。$\mathrm{S_1}$ 〜$\mathrm{S_5}$ は粒子検出器であり，それぞれ荷電粒子が通過するたびにパルス信号を出す。μ^+ が１個ずつ装置に入射するとき，$\mathrm{S_1}$, $\mathrm{S_2}$, $\mathrm{S_5}$ からの信号を組み合わせ,「検出器 $\mathrm{S_1}$ と $\mathrm{S_2}$ に同時に信号があり，かつ $\mathrm{S_5}$ には信号がない」（$*$）という条件を課すことで，μ^+ が減速材でエネルギーを失い，標的を突き抜けることなくその内部で止まった事象を選ぶことができる。

μ^+ の崩壊時間を測定するため，まず μ^+ が標的で静止した条件（$*$）が満たされた時刻に時間測定を開始する。その後，μ^+ が崩壊して放出される陽電子を $\mathrm{S_3}$ および $\mathrm{S_4}$ で検出した時刻に時間測定を終了する。以上の手順を，μ^+ が入射するたびに繰り返す。ここでは，この装置には μ^+ 以外の粒子は入ってこないとする。

5. 陽電子を検出するために使う $\mathrm{S_3}$ と $\mathrm{S_4}$ の検出器は，たとえ荷電粒子が通過しなくても，雑音のためにそれぞれ独立に平均 1 kHz でパルス信号を出すとする。このとき，２つの検出器で同時に信号があったことを要求することで雑音の影響を減らすことを考えよう。パルス信号の時間幅はすべて 50 ns であるとして，２つの検出器からの信号が少しでも重なっていれば「同時に信号があった」と見なすとき，荷電粒子が通過していないにもかかわらず，雑音によって２つの検出器でたまたま同時に信号があったと見なされる事象の頻度は何 Hz になるか。

6. μ^+ が標的で止まってから崩壊するまでの時間を測定したところ，９回の測定の結果は表１のようになった。この測定では雑音の影響は無視できるものとする。粒子の崩壊時間 t は，寿命を τ とすると統計的に指数関数分布 $f(t;\tau) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$ に従う。表１の測定結果から，Likelihood 関数 $L = \prod_{i=1}^{9} f(t_i;\tau)$ を最大化するような $\tau \equiv \tau_0$ を求めることで μ^+ の寿命を推定せよ。

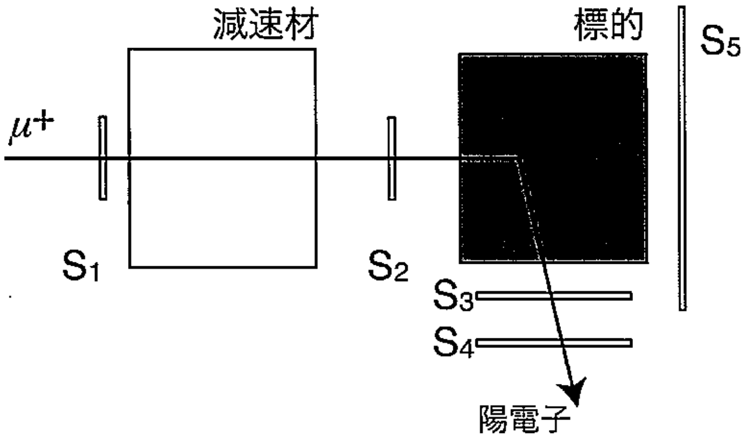


図 1: μ^+ の寿命を測定する装置の概略図

表 1: μ^+ 粒子の崩壊時間の測定結果

測定 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
崩壊時間 t_i (μs)	0.34	0.74	4.76	1.81	1.35	9.80	0.65	0.62	2.43

第 5 問 (配付のグラフ用シールを 2 枚, 答案用紙に貼り付けること。)

液体の特徴は，構造が不規則であるとともに，構成粒子が拡散運動をしていることである。拡散運動を原子レベルで観測する有力な方法に中性子散乱法がある。図 1 に飛行時間法を用いた中性子散乱法の測定の概要を示す。モノクロメーターは様々な波長をもつ中性子線から一定波長の中性子を取り出すための装置である。また，チョッパーは中性子をパルス化するための装置である。実験では，試料で散乱された中性子の強度を，同一円周上に置かれた検出器により，中性子が試料と検出器の間を飛行する時間 Δt の関数として測定する。図 1 において，$\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$ と $\boldsymbol{k}_\mathrm{f}$ はそれぞれ入射と散乱の中性子の波数ベクトル，2θ は散乱角，L は試料と検出器の間の距離である。以下の設問に答えよ。答えはすべて有効数字 2 桁で示せ。中性子の質量を m，Planck 定数を h，$\hbar = h/2\pi$ とせよ。また, 1 Å= 0.1 nm である。相対論的効果は考えなくてよい。

1. モノクロメーターにはグラファイトの (002) 面による反射が良く用いられる。(002) 面の間隔を 3.4 Å としたとき，中性子の波長 λ を Bragg の式を用いて求めよ。ここでは，一次の反射のみを考えよ。また，散乱時に中性子が試料とエネルギーを交換しないとき（弾性散乱），散乱ベクトルの大きさ $Q = |\boldsymbol{k}_\mathrm{i} - \boldsymbol{k}_\mathrm{f}|$ を λ と θ の関数として求めよ。

2. 散乱時に中性子が試料とエネルギーを交換するとき（非弾性散乱），そのエネルギー遷移量 ΔE を Δt，m，h，λ，L の関数として求めよ。

3. 液体に対する中性子散乱強度 $I(Q,\omega)$ は，波数 Q をもつ密度ゆらぎの時間相関関数 $C(Q,t)$ と以下のように Fourier 変換で結びついている。ω は角周波数で，$\Delta E = \hbar\omega$ の関係がある。

$$I(Q,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(Q,t)e^{i\omega t}dt \tag{1}$$

液体粒子の運動として最も単純なブラウン運動的拡散を仮定すると，時間相関関数は

$$C(Q,t) = ae^{-DQ^2|t|} \tag{2}$$

と書ける。ここで D は拡散係数，a は正の定数である。Fourier 変換を実行して

$$I(Q,\omega) = \frac{a}{\pi}\frac{DQ^2}{(DQ^2)^2+\omega^2} \tag{3}$$

になることを示せ。

4. 式 (3) は，$\omega = 0$ で最大値をもつ関数で，Lorentz 関数と呼ばれる。この関数の半値半幅 Γ(最大値の半分の強度をもつ 2 つの ω 間の幅の 1/2 の値) を示せ。

5. ある液体の中性子散乱データを図 2 に示す。このデータは準弾性散乱と呼ばれ，Q は設問 1 および設問 3 における Q と同じである。横軸には ΔE から変換した $\hbar\omega$ をとってある。縦軸 $I(Q,\omega)$ は式 (3) の $I(Q,\omega)$ と同じと考えてよい。半値半幅 Γ をグラフ用シールにプロットし，拡散係数 D を求めよ。ただし、D の単位は $\mathrm{cm^2/s}$ とし，$\hbar = 6.58\times10^{-13}$ (meV·s) の関係を用いよ。なお，グラフは答案用紙に貼り付けよ。

6. 表 1 に水の拡散係数の温度依存性を示す。この値をグラフ用シールにプロットし，Arrhenius 式 $D = D_0\exp(-\Delta E_\mathrm{a}/RT)$ を仮定して，活性化エネルギー ΔE_a を kJ/mol 単位で求めよ。グラフは答案用紙に貼り付けよ。気体定数 $R = 8.3$ J/(K mol)，$\log_e(10) \sim 2.3$，および表 2 の常用対数表を用いよ。得られた活性化エネルギーの値は主に水のどのようなエネルギーと関連するかを述べよ。

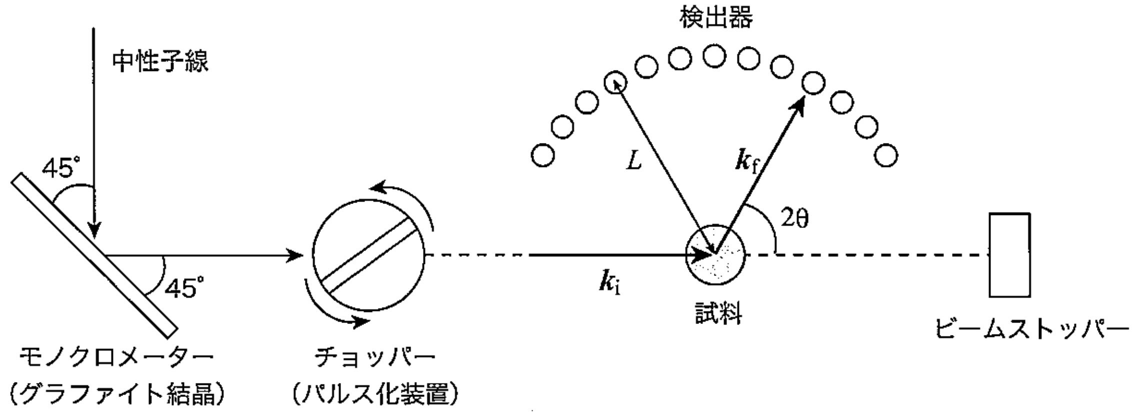


図 1: 飛行時間法による中性子散乱実験の測定概要

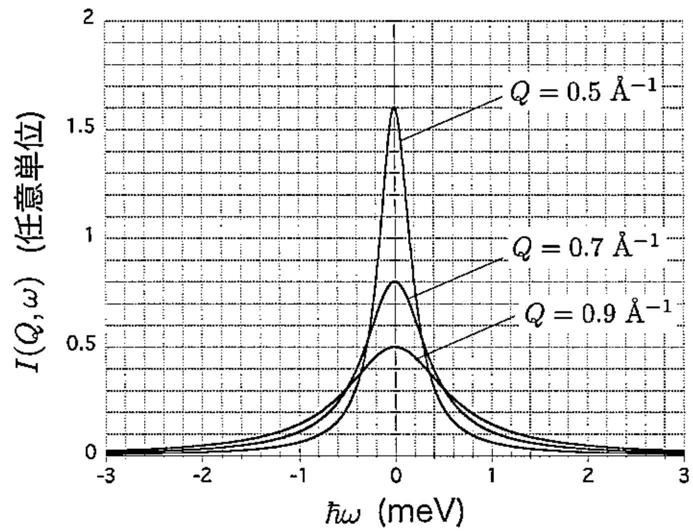


図 2: ある液体の中性子散乱強度のエネルギー依存性

表 1: 水の拡散係数の温度依存性

温度 T (K)	275	286	297
$1/T$ (K^{-1})	3.64×10^{-3}	3.50×10^{-3}	3.37×10^{-3}
拡散係数 D (cm^2/s)	1.10×10^{-5}	1.40×10^{-5}	1.80×10^{-5}

表 2: 常用対数表

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	0.000	0.042	0.079	0.114	0.146	0.176	0.204	0.230	0.255	0.279
2.0	0.301	0.322	0.342	0.362	0.380	0.398	0.415	0.431	0.447	0.462
3.0	0.477	0.491	0.505	0.519	0.532	0.544	0.556	0.568	0.580	0.591

第6問

同軸ケーブルは 19 世紀末に Heaviside により発明され，交流電気信号の伝送に利用されている。同軸ケーブルに関する以下の設問に答えよ。

同軸ケーブルは図 1 のように，円筒形の外部導体（円筒の直径 $2b$）の同心軸上に中心導体（直径 $2a$）がポリエチレンなどの絶縁体（誘電率 ε，透磁率 μ）で保持されている。交流信号はケーブルに沿って伝送し，図 2 のようにケーブルの断面で電場と磁場は互いに直交している。

1. 同軸ケーブルの単位長さあたりの電気容量 C を，ε，a および b を用いて表せ。また，単位長さ当たりのインダクタンス L を，μ，a および b を用いて表せ。

次に同軸ケーブル内での交流信号の伝送を考えよう。同軸ケーブルに沿った方向に x 軸をとり，ケーブルを微小区間 Δx に分けると，同軸ケーブルの等価回路は，抵抗成分がない場合，図 3 のように $L\Delta x$ と $C\Delta x$ で表すことができる。

2. 図 4 のように Δx での交流電圧 $V = V(x,t)$，電流 $I = I(x,t)$ の変化量 ΔV，ΔI を考え，$\Delta x \to 0$ で，$\Delta V/\Delta x \to \partial V/\partial x$，$\Delta I/\Delta x \to \partial I/\partial x$ と表す極限で，

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (2)$$

となることを示せ。

3. V と I，それぞれの波動方程式を導き，V と I の伝送速度 v を L と C を用いて表せ。

4. 絶縁体の比誘電率を 2，比透磁率を 1 とする。同軸ケーブル内の信号伝送速度は光速の約何%か。有効数字 1 桁で答えよ。

5. $Z = V/I$ を同軸ケーブルの特性インピーダンスという。Z がケーブルの長さによらず，L と C を用いて表わせることを示せ。波動方程式を満たす解として，$V = V_0 e^{i\omega(t \pm x/v)}$，$I = I_0 e^{i\omega(t \pm x/v)}$（$\omega$ は交流信号の角周波数）としてよい。

同軸ケーブルで交流電気信号を伝送する場合，終端の負荷を特性インピーダンスと同じにすれば，信号を反射させることなく，伝送させることができる。

6. 図 5 のように抵抗値 R_1，R_2 の抵抗器を利用して，同軸ケーブル 1 の出力での交流信号の電圧 $V_a = V$ を減衰させて同軸ケーブル 2 の末端で $V_o = V/2$ にし，反射させずに伝送させたい。同軸ケーブル 1，2 の特性インピーダンスが Z のとき，R_1，R_2 を Z を用いて表せ。

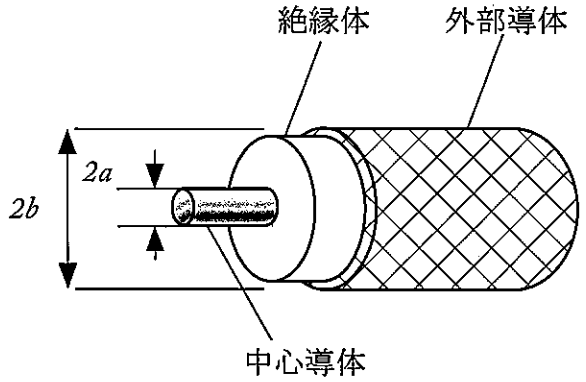

絶縁体
外部導体
2a
2b
中心導体

図1

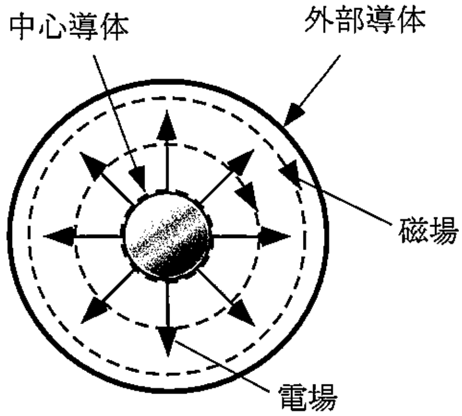

中心導体
外部導体
磁場
電場

図2

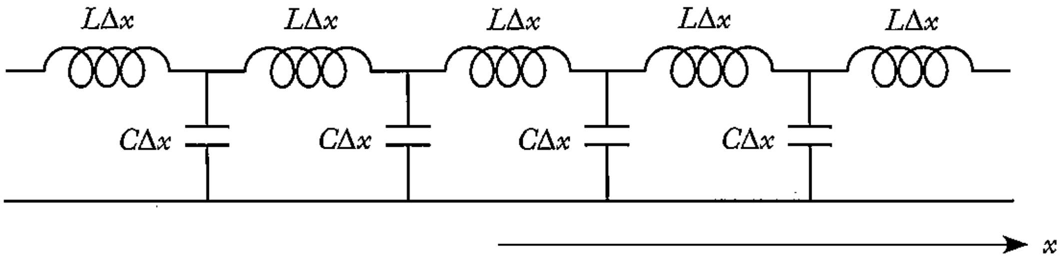

LΔx
CΔx
x

図3

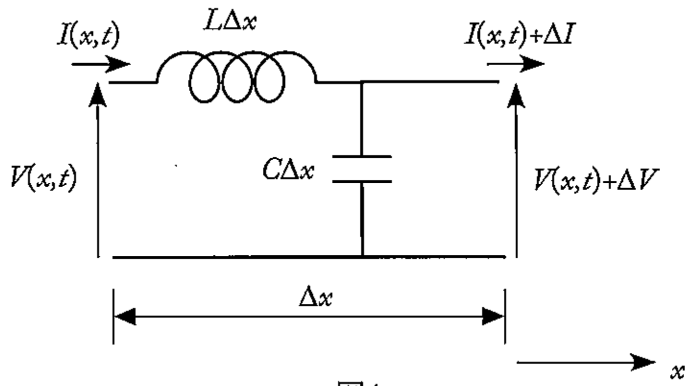

I(x,t)
LΔx
I(x,t)+ΔI
V(x,t)
CΔx
V(x,t)+ΔV
Δx
x

図4

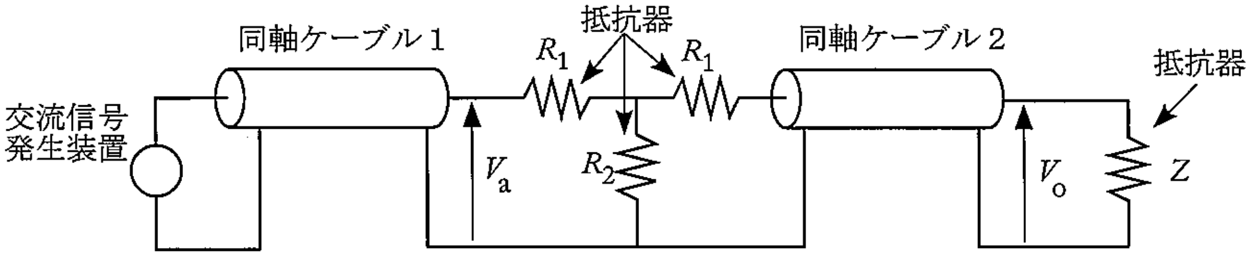

同軸ケーブル１
抵抗器
同軸ケーブル２
抵抗器
R1
R1
交流信号
発生装置
Va
R2
Vo
Z

図5