平成２４年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２３年８月２２日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

1. 以下の設問に答えよ。ただし単位行列 I およびパウリ行列 σ_j $(j=1,2,3)$ を

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

で定義する。i は虚数単位である。

(i) パウリ行列の積 $\sigma_j\sigma_k$ $(j,k=1,2,3)$ を求めよ。

(ii) 実3元ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して行列 $S(\boldsymbol{v})$ を $S(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}=v_1\sigma_1+v_2\sigma_2+v_3\sigma_3$ で定義する。S の積 $S(\boldsymbol{a})S(\boldsymbol{b})$ を単位行列 I とパウリ行列 σ_j の線形結合で表せ。

(iii) 実3元単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ および実数 θ に対して，行列 $X(\boldsymbol{n},\theta)$ を

$$X(\boldsymbol{n},\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta S(\boldsymbol{n})}$$

で定義する。ただし行列 A に対して

$$\mathrm{e}^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

である。$X(\boldsymbol{n},\theta)$ を単位行列 I とパウリ行列 σ_j の線形結合で表せ。

(iv) $X(\boldsymbol{n},\theta)S(\boldsymbol{v})X(\boldsymbol{n},-\theta)$ が $S(\boldsymbol{v}')$ の形に表せることを示し，$\boldsymbol{v}'$ を $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$ の線形結合で表せ。ただし $\times$ はベクトル積（外積）を表す。

(v) $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{v}$ が直交しているとき，$0\leq\theta\leq2\pi$ において設問 (iv) の $\boldsymbol{v}'$ がどのように変化するか説明せよ。

2. 2行2列の複素行列すべての集合を G とする。また，H を2行2列のエルミート行列の集合（$X\in G$ かつ $X^\dagger=X$ を満たす X の集合）とし，U を2行2列のユニタリー行列の集合（$X\in G$ かつ $X^\dagger X=XX^\dagger=I$ を満たす X の集合）とする。ただし $X^\dagger$ は X のエルミート共役（転置の複素共役）を表す。以下の各命題について真偽を答え，「真」の場合は命題を証明し，「偽」の場合には具体的な反例を1つ示せ。

(a) $A\in U$ かつ $B\in U$ ならば，$AB\in U$ である。

(b) $A\in H$ かつ $B\in H$ ならば，$AB\in H$ である。

(c) $A\in H$ ならば $A\in U$ である。

(d) $A\in H$ かつ $A\in U$ ならば，$A=I$ である。

(e) $X\in G$ かつ $X^2=O$ ならば，$X=O$ である（ただし O は全ての成分が0の行列）。

(f) $X\in G$ かつ $X^3=O$ ならば，$X^2=O$ である。

第2問

1.　以下の連立偏微分方程式を考える。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + 4\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ここで $u_1(x,t), u_2(x,t)$ は $-\infty < t < +\infty$ および $-\infty < x < +\infty$ で定義された２変数関数である。以下の設問に答えよ。

(i) 式 (1) を以下のようにベクトル表記する。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}$$

このとき，係数行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ を求めよ。

(ii) 設問 (i) で求めた $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ を並べた２次元正方行列 $P = (\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2)$ を用いて変換

$$\begin{pmatrix} s_1(x,t) \\ s_2(x,t) \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{u}$$

を行い，式 (1) を $s_1(x,t)$, $s_2(x,t)$ に対する偏微分方程式に書き換えよ。

(iii) 設問 (ii) で得られた式は $s_1(x,t), s_2(x,t)$ に対してそれぞれ独立な線形方程式であり，初期条件を与えれば解くことができる。さらに，その解から $u_1(x,t), u_2(x,t)$ を求めることができる。このことを用いて，初期条件

$$u_1(x, t=0) = e^{-x^2}, \qquad u_2(x, t=0) = 0$$

のもとに，連立偏微分方程式 (1) の解 $u_1(x,t), u_2(x,t)$ を求めよ。また $t=1$ での解の概形を図示せよ。

2.　２つの関数 $f_1(x,t), f_2(x,t)$ に対する連立偏微分方程式

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

を初期条件

$$f_1(x, t=0) = e^{-x^2}, \qquad f_2(x, t=0) = 0$$

のもとに解け。関数の定義域は $0 \le t < +\infty$ および $-\infty < x < +\infty$ とする。