平成２５年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２４年８月２７日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(数学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

1. z_1, z_2, z_3, z_4 を複素数とし, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ とする。それを用いた行列式により $\Delta(\vec{z})$ を以下のように定義する。

$$\Delta(\vec{z}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ (z_1)^2 & (z_2)^2 & (z_3)^2 & (z_4)^2 \\ (z_1)^3 & (z_2)^3 & (z_3)^3 & (z_4)^3 \end{vmatrix}$$

$\Delta(\vec{z})$ が次の形に因数分解できることを以下の小問に従って示せ。

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{z}) &= \prod_{1 \le i < j \le 4} (z_i - z_j) \qquad (1) \\ &= (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4) \end{aligned}$$

(i) 式 (1) の両辺が $\vec{z}$ についての 6 次の同次（斉次）多項式であることを示せ。ここで, 多変数関数に対し, $z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots$ という項の次数は $a_1 + a_2 + \cdots$ であると定義する。また, 同次とは, 全ての項の次数が等しいことをいう。

(ii) $\Delta(\vec{z})$ は，互いに異なる i と j に対して z_i が z_j に一致するときゼロとなることを示せ。

(iii) これから, 式 (1) の両辺が比例定数を除いて等しいことが示せる。これを用いて, 係数を比較することにより比例定数が 1 であることを示せ。

2.

(i) 複素変数 z の関数で, 考えている領域で正則である $g(z)$ の表式

$$\frac{1}{g(z)}\frac{dg(z)}{dz}, \quad \frac{1}{g(z)}\frac{d^2 g(z)}{dz^2}$$

を $\lambda(z) = \log(g(z))$ を用いてそれぞれ書き換えよ。

(ii) 設問 1 で定義された $\Delta(\vec{z})$ について，微分

$$f(\vec{z}) = \frac{1}{\Delta(\vec{z})}\frac{\partial^2 \Delta(\vec{z})}{\partial z_1^2}$$

を求めよ。また，$f(\vec{z})$ を z_1 の関数と見なしたとき, 複素平面内で 2 次の極が無いことを示せ。ただし，ここおよび以下では z_2, z_3, z_4 は互いに異なるものとする。

(iii) 複素積分

$$\oint_C \frac{dz_1}{2\pi \mathrm{i}} z_1 f(\vec{z})$$

を求めよ。ここで積分経路 C は内部に z_2, z_3, z_4 を含む円を反時計回りに一周する経路であり, i は虚数単位である。

第2問

$\mathcal{L}$ を微分演算子, $\psi(x_1, x_2)$ を2個の実変数 x_1, x_2 の関数として, 微分方程式 $\mathcal{L}\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$ を考える。ここで, E は定数である。$\mathcal{L}$ の形を

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とする。ここで $a_{i,j}, b_i$ $(i, j = 1, 2)$ は実定数で, $a_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$ のうち少なくとも一つはゼロでないとし, $a_{j,i} = a_{i,j}$ とする。また, $\{a_{i,j}\}$ を2行2列の行列とみなしたときの行列式を D とする。この微分方程式の解の性質について, 以下の設問に答えよ。

1. 或る実行列 $C = \{c_{i,j}\}$ $(i, j = 1, 2)$ を用いて, 変数を

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように線形変換したときに, 微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ を $\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}$ で表せ。ただし, C の行列式はゼロでないとする。

2. $\mathcal{L}$ の中の2階微分の項に関して, 適当な C を選ぶと, $D > 0$ の場合は

$$\pm\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right)$$

となり, $D = 0$ の場合は

$$\pm\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$$

となり, $D < 0$ の場合は

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$$

となることを示せ。

3. 次に, $\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2}\phi(\xi_1, \xi_2)$ のように書き換える。ここで, λ_i $(i = 1, 2)$ は定数である。これにより $\mathcal{L}$ の1階微分の項を変換でき, ϕ に対する微分方程式は, λ_i $(i = 1, 2)$ を適当に選べば, $D > 0$ の場合には

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right)\phi(\xi_1, \xi_2) = F\phi(\xi_1, \xi_2) \tag{2}$$

$D = 0$ の場合には

$$\left(\beta\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right)\phi(\xi_1, \xi_2) = F\phi(\xi_1, \xi_2) \tag{3}$$

$D < 0$ の場合には

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right) \phi(\xi_1, \xi_2) = F\phi(\xi_1, \xi_2) \tag{4}$$

の形になることを示せ。ここで, F, β はそれぞれ定数であるが、具体的に与えなくてよい。

4. 式 (3) において $F = 0, \beta = 1$ とする。

(i) $\xi_1 > 0$ に対して

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2 \xi_1} e^{\mathrm{i} y \xi_2} dy$$

は, 式 (3) を満たすことを示せ。ここで i は虚数単位, また, $f(y)$ は実変数 y の関数であり, この積分の収束条件を満たすとする。

(ii) $\xi_1 = 0$ で $\phi(\xi_1, \xi_2) = \delta(\xi_2)$ の場合に, $\xi_1 > 0$ に対して, この方程式の解を求めよ。ここで $\delta(x)$ はデルタ関数である。また、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ であることは既知としてよい。

5. 式 (4) において $F = 0$ の場合を考える。

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = G_1(\xi_1 - \xi_2) + G_2(\xi_1 + \xi_2)$$

は, 式 (4) を満たすことを示せ。ここで G_i $(i = 1, 2)$ は微分可能な任意の関数である。