

受験番号	
氏名	

平成27年度東京大学大学院理学系研究科  
物理学専攻修士課程入学試験問題

# 物 理 学

平成26年8月25日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(物理学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

## 第1問

以下のハミルトニアンで記述される一次元量子系を考える。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

ここで  $2\pi\hbar (= h)$  はプランク定数,  $m$  は考えている粒子の質量,  $V(x)$  は時間によらないポテンシャルエネルギーである。系は長さ  $2\pi L$  の一次元円周上で定義されているものとし,  $x$  と  $x+2\pi L$  を同一点とみなす。波動関数  $\psi(x)$  およびポテンシャル  $V(x)$  は周期的境界条件  $\psi(x+2\pi L) = \psi(x)$ ,  $V(x+2\pi L) = V(x)$  を満たすものとする。

1.  $V(x) = 0$  の場合にシュレディンガー方程式  $H\psi(x) = E\psi(x)$  を解け。エネルギー  $E$  はどのような値に量子化されるか, またエネルギー固有値に縮退があるのかどうか述べよ。

以下ではポテンシャルがデルタ関数, つまり円周を  $x \in [-\pi L, \pi L]$  とあらわした時

$$V(x) = \frac{\hbar^2 v}{2m} \delta(x)$$

と与えられる場合を考える。  $v$  は定数である。

2. 波動関数  $\psi(x)$  の微分  $\psi'(x) = \frac{d\psi}{dx}$  は  $x = 0$  で次のような不連続性を持つことを, シュレディンガー方程式を用いて説明せよ。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)) = v\psi(0)$$

3.  $v < 0$  の場合, 負エネルギー状態が一つだけ存在することを示す。まず,  $x = 0$  を除く円周  $x \in (0, 2\pi L)$  で波動関数を  $\psi(x) = e^{\kappa x} + Ae^{-\kappa x}$  ( $A$  は定数,  $\kappa > 0$ ) の形に仮定する。それがエネルギー固有値  $E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$  に対応するシュレディンガー方程式の解であることを確認せよ。次に  $x = 0$  における接続条件を調べ,  $A$  の表式, 及び  $v$  と  $\kappa$  の関係を定めよ。最後にグラフを利用して任意の  $v < 0$  に対して  $\kappa$  が一つだけ定まることを示せ。
4.  $v > 0, E > 0$  の場合の解を調べる。  $E$  を正のパラメータ  $k$  を用いて  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  と書く。設問3と同様の解析を行って境界条件を満たすシュレディンガー方程式の解の形を定め,  $k$  と  $v$  の間の関係を求めよ。なお, ポテンシャルエネルギーの影響を受けない解もあることに留意せよ。
5. 設問4で  $k \gg v$  の場合,  $v = 0$  の場合と比較したときのエネルギー固有値の補正を,  $v$  について一次まで求めよ。

**第2問**

高分子鎖について図1のようなモデル化を考えよう。高分子鎖の始点は、二次元正方格子の原点  $(x, y) = (0, 0)$  に固定されている。また、高分子鎖を構成するモノマー(単量体)の間をつなぐ手の長さは  $\sqrt{2}$  で、それぞれの手は右斜上45度あるいは左斜上45度のいずれかの方向にのみ伸びることができるものとする。

$y$  軸方向の長さが  $L$  (モノマー数が  $L+1$ ) の高分子鎖を考えると、その取りうる配位の総数は  $2^L$  である。そのうち、終点が  $(x, L)$  である配位の数  $C(x, L)$  とすると、 $C(x, L)$  と  $C(x, L+1)$  との間には、以下の漸化式が成り立つ。

$$C(x, L+1) = C(x-1, L) + C(x+1, L) \tag{1}$$

1.  $C(x, L)$  が以下で与えられることを示せ。

$$C(x, L) = \begin{cases} \frac{L!}{((L-x)/2)!((L+x)/2)!} & (L+x) \text{ が偶数, かつ } |x| \leq L \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{2}$$

2.  $x$  に関する  $C(x, L)$  のフーリエ変換  $\tilde{C}(k, L)$

$$\tilde{C}(k, L) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ikx} C(x, L), \quad C(x, L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \tilde{C}(k, L) dk \tag{3}$$

を導入する。式(1)から  $\tilde{C}(k, L)$  に関する漸化式を導け。

3.  $L=0$  における初期条件と上で求めた漸化式から、 $\tilde{C}(k, L)$  の表式を導け。
4.  $k^2 L$  を一定に保ったままで、 $L$  を十分に大きくすることを考える。 $\log \tilde{C}(k, L)$  を  $k$  に関して2次まで展開し、 $C(x, L)$  の漸近形を求めよ。必要であれば、ガウス積分の公式  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$  (ただし、 $a$  は正の実数) を用いてよい。

終点のモノマーに電荷  $q$  を与える。それ以外のモノマーは電氣的に中性とする。 $x$  軸の正の向きに大きさ  $E$  の静電場を印加した状況を考える。 $y$  軸方向の長さが  $L$  の系が、温度  $T$  の熱浴に接し、熱平衡状態にあるとき、以下の設問に答えよ。ただし、ボルツマン定数を  $k_B$  とする。また、 $L$  は設問4の近似が使えるほどは大きくないとする。

5. この系の分配関数を求めよ。
6. 終点のモノマーの  $x$  軸方向の位置の期待値  $\langle x \rangle$  を  $T$  と  $E$  の関数として求めよ。
7.  $E=0$  における  $x$  の分散  $\langle x^2 \rangle_{E=0}$  と、 $x$  の期待値の  $E$  に関する微係数  $\left. \frac{\partial \langle x \rangle}{\partial E} \right|_{E=0}$  との間には比例関係が成り立つことを、 $C(x, L)$  の詳細な形を用いずに示せ。また、その比例係数を求めよ。

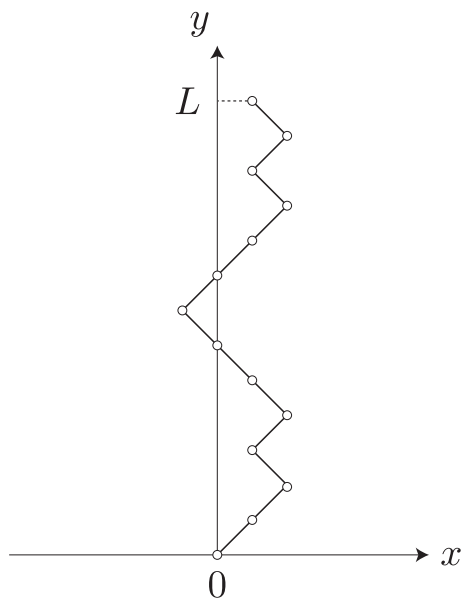


図 1: 高分子鎖のモデル

### 第3問

Maxwell 方程式は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i}\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  はそれぞれ電場と磁束密度、 $\rho$ ,  $\mathbf{i}$  はそれぞれ電荷密度および電流密度である。また、光速  $c$ , 真空誘電率  $\epsilon_0$ , 真空透磁率  $\mu_0$  の間には、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  の関係が成り立つ。

まず、3次元直交座標系  $\mathcal{O}$  において、 $z$  軸上の  $-\infty$  から  $+\infty$  まで一定間隔で並べられた荷電粒子群が、 $z$  軸に沿って速度  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$  で等速運動している系を考える。ここで、各荷電粒子は電荷  $q$  を持ち、その間隔は座標系  $\mathcal{O}$  において  $a$  であるとする。

1. 座標系  $\mathcal{O}$  において、点  $(x, 0, 0)$  (ただし  $|x| \gg a$ ) での電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めよ。

この系を、座標系  $\mathcal{O}$  に対して速度  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$  で等速運動する座標系  $\mathcal{O}'$  で記述することを考える。このとき、座標系  $\mathcal{O}(t, x, y, z)$  と  $\mathcal{O}'(t', x', y', z')$  の間には Lorentz 変換の関係

$$(ct', x', y', z') = (\gamma(ct - \beta z), x, y, \gamma(z - \beta ct)) \quad (1)$$

が成り立つ。ただし  $\beta = v_z/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  である。

2. 座標系  $\mathcal{O}'$  において、荷電粒子の間隔  $a'$  が  $a' = \gamma a$  となることを、式 (1) を用いて示せ。
3. 座標系  $\mathcal{O}'$  において、点  $(x', y', z')$  (ただし  $x'^2 + y'^2 \gg a'^2$ ) での電場  $\mathbf{E}'$  と磁束密度  $\mathbf{B}'$  を求めよ。

座標系  $\mathcal{O}$  と  $\mathcal{O}'$  における電場  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{E}'$  および磁束密度  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{B}'$  の各成分の間には、以下の関係式が成り立つ。

$$(E_x, E_y, E_z) = (\gamma(E'_x + c\beta B'_y), \gamma(E'_y - c\beta B'_x), E'_z) \quad (2)$$

$$(B_x, B_y, B_z) = \left( \gamma \left( B'_x - \frac{\beta}{c} E'_y \right), \gamma \left( B'_y + \frac{\beta}{c} E'_x \right), B'_z \right) \quad (3)$$

4. 設問3の結果と式 (2), (3) を用いて座標系  $\mathcal{O}$  における電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めよ。さらにこの結果を設問1の結果と比較せよ。

次に、座標系  $\mathcal{O}$  において  $z$  軸上を速度  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$  で等速運動する1個の荷電粒子 (電荷  $q$ ) のみがある場合を考える。このとき、この荷電粒子は座標系  $\mathcal{O}'$  の原点にとどまり続けると考えることができる。

5. 座標系  $\mathcal{O}'$  において、点  $(x', y', z')$  での電場  $\mathbf{E}'$  と磁束密度  $\mathbf{B}'$  を求めよ。ただし、原点は除く。
6. 座標系  $\mathcal{O}$  において、点  $(x, 0, 0)$  (ただし  $x \neq 0$ ) での電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めよ。式 (1), (2), (3) の関係がこの場合でも成り立つことを用いてよい。

#### 第4問

ガンマ線をはじめとする光子に関する以下の設問に答えよ。以下の表中の表式および数値を適宜用いてよい。

物理量	記号, 数式	数値
光速度	$c$	$3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$
プランク定数	$h = 2\pi\hbar$	$6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$
	$\hbar c$	$200 \text{ MeV fm}$
素電荷	$e$	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
微細構造定数	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$	$1/137$
電子の質量	$m_e$	$0.5 \text{ MeV}/c^2$
水素原子の束縛エネルギー	$\frac{1}{2}m_e(\alpha c)^2$	$13.6 \text{ eV}$

- エネルギーが  $0.5 \text{ MeV}$  の光子の波長を有効数字2桁で答えよ。
- 波長  $\lambda$  の光子が、静止している電子と衝突し、角度  $\theta$  に散乱された。散乱後の光子の波長  $\lambda'$ 、反跳後の電子の運動量の大きさ  $p_e$ 、反跳角度  $\psi$ 、プランク定数  $h$ 、および電子の質量  $m_e$  を用いて、散乱前後での相対論的なエネルギー・運動量保存則を書き下せ。
- 設問2で得られた等式から、 $p_e$  および  $\psi$  を消去することにより、衝突後の光子の波長  $\lambda'$  を、 $\lambda$ 、 $\theta$ 、および  $\lambda_e = h/(m_e c)$  で表せ。
- ガンマ線と物質との主要な相互作用は3種類ある。図1の3種の曲線は、NaIシンチレータに対して、それぞれの相互作用による吸収係数を示したものである。設問2および3で扱った過程と最も深く関連する相互作用は図1のA、B、Cのうちのどれかを答えよ。また、図中の矢印で示される吸収係数の急激な増大が起こるエネルギー値が何に対応しているかを述べよ。
- 鉛でできた遮蔽箱の中で、NaIシンチレータを用いて放射線源  $^{137}_{55}\text{Cs}_{82}$  からのガンマ線を測定した。図2は、シンチレータに結合した光電子増倍管からのパルス信号の大きさを波高分析装置でデジタル変換した後に得られたスペクトルである。横軸はエネルギーに比例しているが較正は行っていない。スペクトル中、(a)–(c)で示されるピーク等の構造が現れる理由およびそれらのエネルギーの値(有効数字2桁でよい)を、図中に示した崩壊様式を参考にし、ガンマ線と物質との相互作用の種類と関連させて述べよ。
- 数  $10 \text{ MeV}$  から  $\text{GeV}$  領域にいたる高エネルギーの光子ビームを生成するために、レーザー光と相対論的エネルギーの電子との後方散乱が用いられている。波長  $\lambda$  の光子が、相対論的エネルギー  $\gamma m_e c^2$  の電子と正面衝突し、正反対方向 ( $\theta = \pi$ ) に散乱されたとする。  $\lambda m_e c/h \gg 4\gamma$  のとき、光子のエネルギーが  $[(1 + \beta)\gamma]^2$  倍、すなわち、波長  $\lambda'$  が、  $1/[(1 + \beta)\gamma]^2$  となることを示せ。ただし、  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  とする。

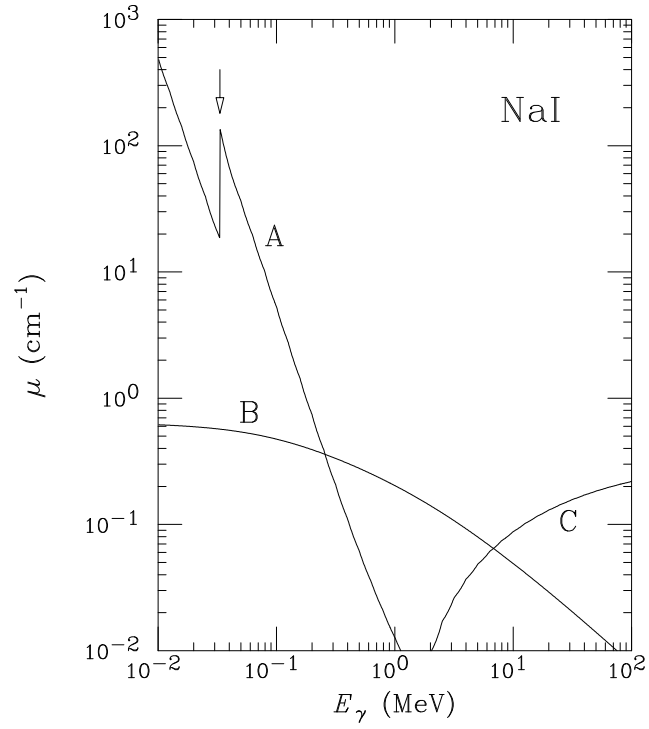


图 1:

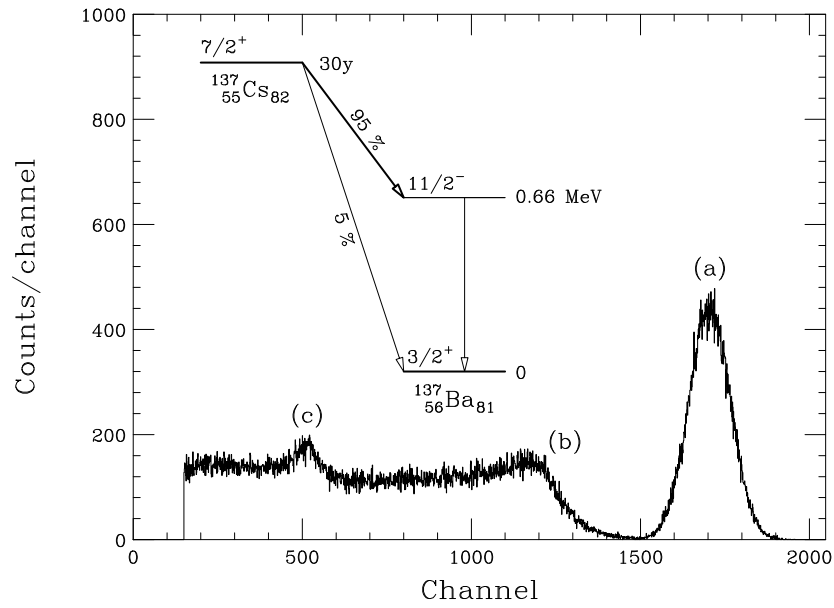


图 2:

### 第5問

常磁性体に外部磁場  $H$  をかけると磁化  $M$  が誘起される。 $H$  が十分に小さい時  $M = \chi H$  であり、比例係数  $\chi$  を磁化率と呼ぶ。磁気天秤の方法を用いて磁化率を測定し、物質中の原子の微視的電子状態を考察する。以下の設問に答えよ。真空中の透磁率は  $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ 、ボーア磁子は  $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ 、ボルツマン定数は  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  とする。

1. 図1に示すように、 $x$  方向に磁場を発生する電磁石中に天秤の片端に吊り下げた磁化率  $\chi$ 、体積  $v$  の常磁性試料を置いた。磁場  $H_x$  をかけたことによる試料のエネルギー変化を  $\mu_0, \chi, v, H_x$  を用いて表せ。
2. 図1において、 $x$  方向の磁場  $H_x$  は試料付近で  $y$  方向（上下）の位置に依存してごくわずかに変化する。試料位置を  $y = 0$  とすると、磁場の  $y$  依存性は  $H_x(y) = H_0 - \alpha y$  で近似される。ここで  $\alpha > 0$  は定数であり、 $H_0 > 0$  の場合を考える。磁化が誘起された試料は  $y$  方向の磁場勾配のもとで力  $f$  を受ける。設問1の結果を用いて  $y$  方向の力  $f$  の大きさと上下の向きを求めよ。大きさは  $\mu_0, \chi, v, H_0, \alpha$  を用いて表せ。試料の大きさ程度の領域では  $|\alpha y|$  は  $H_0$  より十分に小さいものとする。
3. 設問2の設定における力  $f$  を天秤により精密に測定し、磁化率を求める。天秤の反対の端に小さな永久磁石を吊るし、周囲に引き戻しコイルを置く。 $H_0 = 0$  の時、試料位置  $y = 0$  で天秤を平衡させた。磁場  $H_0 \neq 0$  をかけると、試料に力  $f$  が加わる。この時、引き戻しコイルに電流  $I$  を流すことにより、永久磁石に  $y$  方向の力を加え、天秤が動かないようにした。平衡を保つのに必要な電流  $I$  は力  $f$  と比例するように設計されている。磁化率  $\chi_R$  と体積  $v_R$  が既知の常磁性の較正試料 R をセットし、磁場  $H_0$  をゆっくりと変化させた。引き戻しコイルの電流  $I$  は磁場  $H_0$  に対してほぼ線形に増加し、 $I = AH_0$  であった。次に磁化率未知の体積  $v$  の常磁性試料 X について同じ測定を行い、 $I = BH_0$  を得た。これらの事実をもとに、試料 X の磁化率  $\chi$  を求めよ。解答は  $\chi_R, v_R, v, A, B$  を用いて表せ。

数密度  $N_m$  のほぼ孤立した磁性イオンを含む試料の磁化率  $\chi$  は、温度  $T$  の関数としてキュリー則  $\chi(T) = N_m(p_{\text{eff}}\mu_B)^2\mu_0/(3k_B T)$  に従う。 $p_{\text{eff}}\mu_B$  は磁性イオンの有効磁気モーメントの大きさである。磁気モーメントが電子スピンの寄与のみからなる場合、全電子スピン  $\mathbf{S}$  の量子数  $S$  と  $g$  因子を用いて  $p_{\text{eff}}^2 = g^2 S(S+1)$  である。

4. 表1に磁気天秤を用いて測定した  $\text{Gd}^{3+}$  イオン (数密度  $N_m$ ) を含む試料の  $\chi/N_m$  のデータを示す。 $\chi$  が温度の逆数に比例することがわかるように、縦軸と横軸の物理量を工夫して表1のデータをプロットせよ。またキュリー則の式を用いて、 $p_{\text{eff}}^2$  を有効数字2桁で求めよ。
5.  $\text{Gd}^{3+}$  イオンは、軌道角運動量の量子数  $l = 3$  の  $4f$  軌道に7個の電子が収容され、磁気モーメントを有する。電子の上下2種類のスピン状態と方位量子数  $l_z = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$  の7種類の軌道状態への配置は以下のフント則によって決まる。  
(A) 各電子スピン  $\mathbf{s}$  の和  $\mathbf{S}$  (全電子スピン) の量子数  $S$  が最大。



(B) A の条件のもとで各電子の軌道角運動量  $l$  の和  $\mathbf{L}$  の量子数  $L$  が最大。  
 (C) A, B の条件のもとで 全角運動量の量子数  $J = |L - S|$  の状態が基底状態。(全電子数が収容可能電子数の半分以下の場合。)  
 $\text{Gd}^{3+}$  イオンの磁気モーメントが電子スピンの寄与だけからなることを示せ。 $\text{Gd}^{3+}$  イオンの全電子スピンの量子数  $S$  から予想される  $p_{\text{eff}}^2$  を設問 4 の実験結果と比較せよ。ここで  $g = 2$  とする。

表 1: 数密度  $N_m$  の  $\text{Gd}^{3+}$  イオンを含む常磁性体試料の磁化率の温度依存性

$T(\text{K})$	$\chi/N_m(\text{m}^3)$
50	$3.30 \times 10^{-30}$
100	$1.65 \times 10^{-30}$
200	$0.83 \times 10^{-30}$
300	$0.55 \times 10^{-30}$

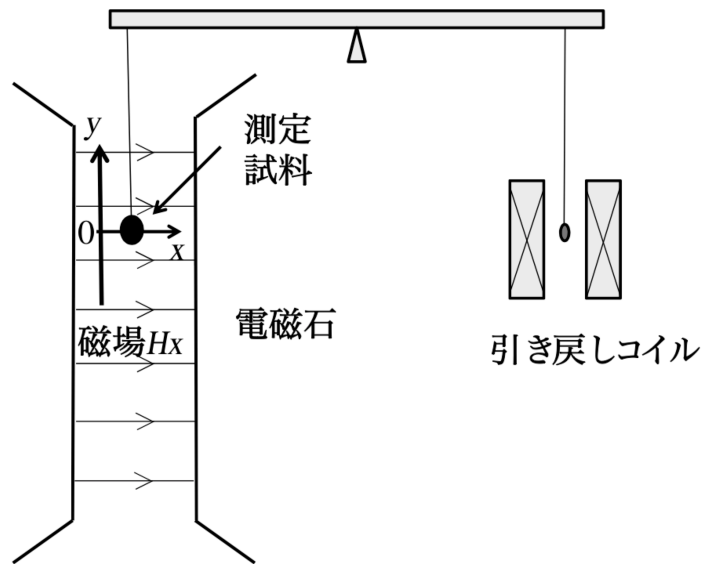


図 1: 磁気天秤システムの構成

## 第6問

地上実験，および天体観測で，一見，光速を超える速さが観測される例を考える。

まず，地上でミューオンの速度を測る実験をする。図1に示すように，高速(速度 $v$ )のミューオンのビームを用意し，その経路上に厚さ $d = 0.5 \text{ cm}$ のプラスチックシンチレータ(密度 $\rho = 1.1 \text{ g/cm}^3$ )を30 mの距離をあけて2台並べる。ミューオンはシンチレータでエネルギーを失って蛍光を生み，これが光電子増倍管(PMT)で電気信号に変わる。この信号の時間差を測定する実験を構築した。以下では，ミューオンの質量は $m_\mu c^2 = 100 \text{ MeV}$ ，光速は $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ ， $\beta = \frac{v}{c}$ ， $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とする。プラスチックシンチレータ内でのエネルギー損失 $\varepsilon$ は，図2に示した。

- $\beta = 0.9$ の時，特殊相対論を考慮して，ミューオンの全エネルギーを有効数字1桁で求めよ。また，シンチレータでミューオンが失うエネルギーを，図2のグラフを用いて有効数字1桁で概算せよ。
- 事前の確認実験によると，各々のシンチレータにおいて，1つのミューオンが通過する時刻の測定ばらつきは正規分布で近似され，標準偏差はそれぞれ $\sigma = 0.7 \text{ ns}$ であった。 $\beta = 0.990$ のミューオンが1つ入射したとき，時刻記録装置から得られる2つのPMTの信号の時間差を有効数字3桁で求め，誤差も示せ。これを用いて，測定されるミューオンの速度 $v$ を有効数字3桁で求め，誤差を示せ。また，この装置で測定されたミューオンの速度が，“光速を超える”確率を有効数字1桁で概算せよ。

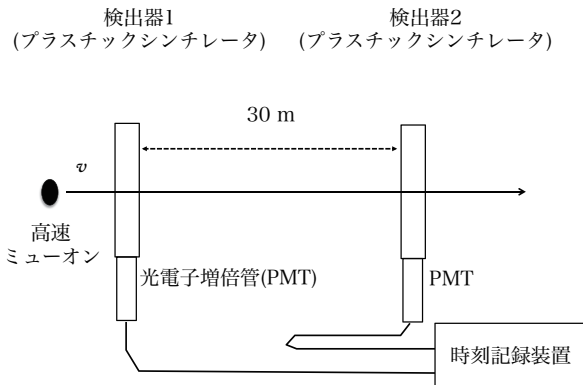


図1：実験のセットアップ

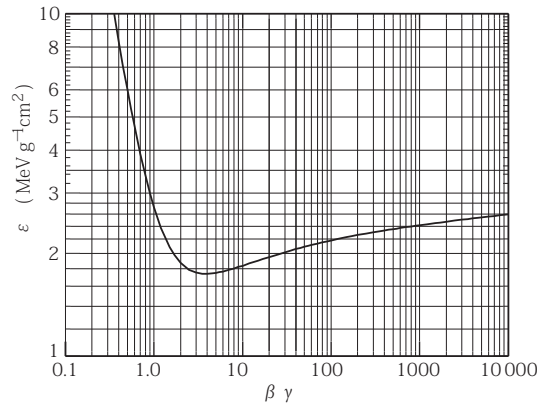


図2：プラスチックシンチレータ内でのミューオンのエネルギー損失

つぎに，遠方の宇宙における光速に近い物体の動きを観測する。地上時間 $\Delta t$ の間の，天体の天球面内の見かけの移動距離 $\Delta x$ を観測することで，“天球面内の見かけの速さ” $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ を知ることができる。図3に示すように，地球からみて静止している天体Aから，地球に向かって角度 $\theta$ を持つ方向に，速度 $v$ で物体Bが発射された。

- 物体Bの見かけの速さを $u_b$ とする。これを $\theta$ ， $\beta = \frac{v}{c}$ を用いて表せ。このとき，天体Aから地球までの距離よりも，単位時間後にBが移動した位置から地球までの距離の方が短いことに注意せよ。

4.  $v$  が一定のとき,  $u_b$  の最大値を与える  $\theta$  の満たす式を求めよ。また,  $\beta = 0.99$  の時,  $u_b$  の最大値が光速の何倍になるかを有効数字 1 桁で示せ。
5. 天体 A から, 物体 B と同時に逆方向に物体 C が同じ速さ  $v$  で発射されていた。これを観測したときの  $-x$  方向に動く “見かけの速さ”  $u_c$  を,  $\theta, \beta = \frac{v}{c}$  を用いて表せ。さらに,  $u_b = 2c, u_c = 0.25c$  のとき,  $\beta, \sin\theta$  を有効数字 1 桁で求めよ。

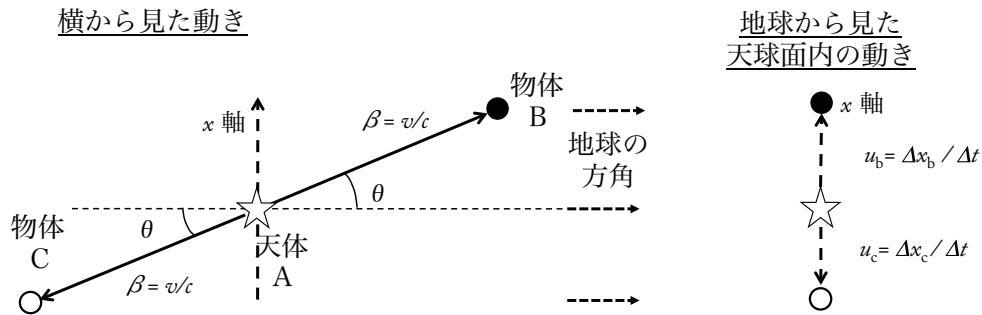


図 3 : 天体 A とそこから発射される物体 B, C の様子。