平成２６年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２５年８月２６日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3．問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4．答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5．各答案用紙の所定欄に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6．解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7．答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第１問

以下の設問に答えよ。変数 x や t は実数であり，関数 y, y_1, y_2 は実関数である。

1. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha y$$

を満たす関数 $y(x)$ を求めよ。$y(b) = A$ とする。α, b, A は実定数である。

2. 連立微分方程式

$$\frac{dy_1}{dx} = -\alpha y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 - \gamma y_2$$

を満たす関数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ を求めよ。$y_1(0) = A,\, y_2(0) = 0$ とする。α, β, γ, A は正の実定数であり，$\alpha \neq \gamma$ とする。$y_1(x)$，$y_2(x)$ の符号はどうなるか述べよ。

3. 連立微分方程式

$$\frac{dy_1}{dx} = -c\,y_1 + \sqrt{3}\,c\,y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \sqrt{3}\,c\,y_1 - 3\,c\,y_2$$

を満たす関数 $y_1(x), y_2(x)$ を求めよ。ここで、c は実定数であり、$y_1(0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, y_2(0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ とする。

4. 偏微分方程式

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

の解 $y(x,t)$ を見つけたい。境界条件としては，実定数 $a > 0$ に対し，$x \leq -a$ 及び $x \geq a$ では $y(x,t) = 0$ とする。$-a < x < a$ で微分可能な解を一つ以上示せ。ただし，y=定数なる解は考慮しない。

5. 非斉次微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha(1 - \beta y)y$$

を満たす関数 $y(x)$ を求めよ。α, β は正定数である。$y(0) = A$ とする。ここで，A は正定数である。

第２問

1. 次の $n(\geq 3)$ 次元正方行列 $A(\epsilon,t)$ について，設問 (i) から (v) に答えよ。

$$A(\epsilon,t) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon & t & & & & t \\ t & \epsilon & t & & & \\ & t & \epsilon & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & t & \\ & & & t & \epsilon & t \\ t & & & & t & \epsilon \end{pmatrix},$$

すなわち，$A_{i,i} = \epsilon\ (i = 1,2,\cdots,n)$，$A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = t\ (i = 1,2,\cdots,n-1)$，$A_{n,1} = A_{1,n} = t$，であり，これら以外の成分はすべて 0 であるものとする。また，ϵ, t は実数，特に $t > 0$ であるとする。

(i) 任意の n 個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を成分に持つ n 次元縦ベクトルに対して，

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$$

となるような行列 P を具体的に成分で表せ。

(ii) $PA - AP$ を求めよ。

(iii) P の互いに線形独立な n 個の固有縦ベクトル，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$，及び，それぞれの固有値を求めよ。

(iv) P の２つの互いに異なる固有値に対応する固有縦ベクトルを $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ とする．このとき，$\boldsymbol{x}^\dagger A \boldsymbol{y} = 0$ であることを示せ。ここで，$\boldsymbol{x}^\dagger \equiv {}^t\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{x}$ のエルミート共役である。

(v) $D \equiv U^\dagger A U$ が対角行列であるようなユニタリ行列 U と，そのときの D とを求めよ。

2. 次の $2n$ 次元正方行列 B について，設問 (i)，(ii) に答えよ。

$$B \equiv \begin{pmatrix} A(0,t) & \lambda I \\ \lambda I & A(0,2t) \end{pmatrix}$$

ただし，$A(\epsilon,t)$ は前問で定義された行列，I は n 次元単位行列，λ は正の実数である。

(i) B の $2n$ 個の固有値をすべて求めよ。

(ii) (i) で求めた固有値を $\lambda = 0$ の場合と比較せよ。とくに，λ が小さく $0 < \lambda \ll t$ である場合，λ がゼロでないことによって生じる固有値の微小な変化が λ の何乗に比例するかを答えよ。