| | |
|---|---|
| 受験番号 | |
| 氏　　名 | |

# 平成２７年度東京大学大学院理学系研究科<br>物理学専攻修士課程入学試験問題

# 数　　　学

平成２６年８月２５日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**（数学）、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

**第１問**

1. $n$ 次の正方行列 $A$ に対して，変数 $x$ に対する方程式

$$\det(xE - A) = 0 \tag{1}$$

を特性方程式，左辺を特性多項式と呼ぶ。ただし，$E$ は単位行列である。以下では $n = 2$ の場合を考える。

(i) 特性方程式を，$\mathrm{Tr}\, A$, $\det A$ を用いて表せ。

(ii) 特性多項式において $x$ に行列 $A$ を代入して得られる行列はゼロ行列であり，このため $A^N$（ただし，$N = 2, 3, \ldots$）は $A$ のより低い冪の線形結合で表される。このことを用いて，$\det A = 1$ の場合には，

$$U_N(\xi) - 2\xi U_{N-1}(\xi) + U_{N-2}(\xi) = 0 \tag{2}$$

という漸化式を満たす関数列 $U_N(\xi)$ により，$A^N$ が

$$A^N = U_{N-1}(\xi)A - U_{N-2}(\xi)E \tag{3}$$

のように表されることを示せ。ここで $\xi = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A$ である。

2. 次に，$a \leq x \leq b$ で

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] \tag{4}$$

により定義された２階微分演算子 $\mathcal{L}$ を考える。ここで，$p(x)$ は $x$ の実関数であり，$p(a) = p(b) = 0$ を満たすものとする。このとき，

$$\int_a^b v^*(x)\mathcal{L}u(x)dx = \int_a^b u(x)(\mathcal{L}v(x))^*dx \tag{5}$$

が成り立つことを示せ。ただし $u(x)$ と $v(x)$ は $x$ の複素関数である。

3. 式 (4) で定義された演算子 $\mathcal{L}$ に対して，２階微分方程式

$$\mathcal{L}u(x) = \lambda w(x)u(x) \tag{6}$$

を考える。ただし，$w(x)$ は $x$ の実関数であり，$a < x < b$ において正の値をとる。この微分方程式が成立すれば，$\lambda$ は実数であることを示せ。

また，$\lambda = \lambda_1$ に対する微分方程式 (6) の解を $u_1(x)$，$\lambda = \lambda_2$ に対する解を $u_2(x)$ としたときに，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であれば

$$\int_a^b u_1(x)u_2^*(x)w(x)dx = 0 \tag{7}$$

であることを示せ。

4. 上記の設問 1 における $U_N(x)$ は，$-1 \leq x \leq 1$ において

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}U_N(x) - 3x\frac{d}{dx}U_N(x) + N(N+2)U_N(x) = 0 \tag{8}$$

という微分方程式を満たすことが知られている。この微分方程式が，式 (4) において $p(x)$ を適当に選んだ $\mathcal{L}$ により与えられる方程式 (6) の形になることを示せ。さらに，$M \neq N$ に対して

$$\int_{-1}^{1} U_M(x)U_N(x)(1-x^2)^{1/2}dx \tag{9}$$

を，解答の筋道を示した上で求めよ。

**第2問**

実数 $t$ および $x$ の複素関数 $f(t,x)$ が

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}+S(t,x) \tag{1}$$

という微分方程式を満たすとする。ただし $\lambda$ は正の実定数，$S(t,x)$ は与えられた関数である。$f(t,x)$ は $x$ に関してフーリエ変換可能な関数であるとして，以下の設問に答えよ。

1. $S(t,x)=0$ のとき，方程式 (1) の一般解は

$$f(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\tilde{f}(k)\exp\left(-\lambda k^2 t-\mathrm{i}kx\right) \tag{2}$$

という形に表されることを示せ。ただし，$\tilde{f}(k)$ は $k$ の関数である。

2. 関数 $G(t,x,t',x')$ が

$$\frac{\partial G(t,x,t',x')}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 G(t,x,t',x')}{\partial x^2}+\delta(t-t')\delta(x-x') \tag{3}$$

という方程式を満たすとする。ただし，$\delta(x)$ はデルタ関数である。このとき

$$f(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}dx' G(t,x,t',x')S(t',x') \tag{4}$$

という関数が方程式 (1) の解となることを示せ。

3. 複素定数 $C$ と $\alpha$ を適切に選べば

$$G(t,x,t',x')=C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-t')-\mathrm{i}k(x-x')}}{\omega-\mathrm{i}\alpha\lambda k^2} \tag{5}$$

という関数は方程式 (3) を満たすことを示せ。また，そのような $C$ と $\alpha$ を求めよ。

4. 式 (5) において，まず $\omega$ についての積分を，$t<t'$ および $t>t'$ それぞれの場合について行え。ただし，設問3で得られた $C$ と $\alpha$ の値を用いること。

5. さらに式 (5) の $k$ についての積分を行い，$t<t'$ および $t>t'$ それぞれの場合について，$G(t,x,t',x')$ の具体的な関数形を求めよ。ただし，必要であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-x^2}=\sqrt{\pi} \tag{6}$$

という公式を用いよ。

6. 関数 $S(t,x)$ が

$$S(t,x)=\delta(t)\cos(px) \tag{7}$$

という形に与えられているとする。ただし，$p$ は実定数である。このとき $t<0$ で $f(t,x)=0$ となるような $f(t,x)$ を求めよ。また，得られた関数 $f(t,x)$ について，$t$ をある正の値に固定した場合の最大値と，その最大値を与える $x$ を求めよ。

**第１問**

1. $n$ 次の正方行列 $A$ に対して，変数 $x$ に対する方程式

$$\det(xE - A) = 0 \tag{1}$$

を特性方程式，左辺を特性多項式と呼ぶ。ただし，$E$ は単位行列である。以下では $n = 2$ の場合を考える。

(i) 特性方程式を，$\mathrm{Tr}\,A$, $\det A$ を用いて表せ。

(ii) 特性多項式において $x$ に行列 $A$ を代入して得られる行列はゼロ行列であり，このため $A^N$（ただし，$N = 2, 3, \ldots$）は $A$ のより低い冪の線形結合で表される。このことを用いて，$\det A = 1$ の場合には，

$$U_N(\xi) - 2\xi U_{N-1}(\xi) + U_{N-2}(\xi) = 0 \tag{2}$$

という漸化式を満たす関数列 $U_N(\xi)$ により，$A^N$ が

$$A^N = U_{N-1}(\xi)A - U_{N-2}(\xi)E \tag{3}$$

のように表されることを示せ。ここで $\xi = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,A$ である。

2. 次に，$a \leq x \leq b$ で

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] \tag{4}$$

により定義された２階微分演算子 $\mathcal{L}$ を考える。ここで，$p(x)$ は $x$ の実関数であり，$p(a) = p(b) = 0$ を満たすものとする。このとき，

$$\int_a^b v^*(x)\mathcal{L}u(x)dx = \int_a^b u(x)(\mathcal{L}v(x))^* dx \tag{5}$$

が成り立つことを示せ。ただし $u(x)$ と $v(x)$ は $x$ の複素関数である。

3. 式 (4) で定義された演算子 $\mathcal{L}$ に対して，２階微分方程式

$$\mathcal{L}u(x) = \lambda w(x)u(x) \tag{6}$$

を考える。ただし，$w(x)$ は $x$ の実関数であり，$a < x < b$ において正の値をとる。この微分方程式が成立すれば，$\lambda$ は実数であることを示せ。

また，$\lambda = \lambda_1$ に対する微分方程式 (6) の解を $u_1(x)$，$\lambda = \lambda_2$ に対する解を $u_2(x)$ としたときに，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であれば

$$\int_a^b u_1(x)u_2^*(x)w(x)dx = 0 \tag{7}$$

であることを示せ。

4. 上記の設問 1 における $U_N(x)$ は，$-1 \leq x \leq 1$ において

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}U_N(x) - 3x\frac{d}{dx}U_N(x) + N(N+2)U_N(x) = 0 \tag{8}$$

という微分方程式を満たすことが知られている。この微分方程式が，式 (4) において $p(x)$ を適当に選んだ $\mathcal{L}$ により与えられる方程式 (6) の形になることを示せ。さらに，$M \neq N$ に対して

$$\int_{-1}^{1} U_M(x)U_N(x)(1-x^2)^{1/2}dx \tag{9}$$

を，解答の筋道を示した上で求めよ。

**第2問**

実数 $t$ および $x$ の複素関数 $f(t,x)$ が

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} + S(t,x) \tag{1}$$

という微分方程式を満たすとする。ただし $\lambda$ は正の実定数，$S(t,x)$ は与えられた関数である。$f(t,x)$ は $x$ に関してフーリエ変換可能な関数であるとして，以下の設問に答えよ。

1. $S(t,x)=0$ のとき，方程式 (1) の一般解は

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \exp\left(-\lambda k^2 t - \mathrm{i}kx\right) \tag{2}$$

という形に表されることを示せ。ただし，$\tilde{f}(k)$ は $k$ の関数である。

2. 関数 $G(t,x,t',x')$ が

$$\frac{\partial G(t,x,t',x')}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 G(t,x,t',x')}{\partial x^2} + \delta(t-t')\delta(x-x') \tag{3}$$

という方程式を満たすとする。ただし，$\delta(x)$ はデルタ関数である。このとき

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(t,x,t',x') S(t',x') \tag{4}$$

という関数が方程式 (1) の解となることを示せ。

3. 複素定数 $C$ と $\alpha$ を適切に選べば

$$G(t,x,t',x') = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{\mathrm{i}\omega(t-t')-\mathrm{i}k(x-x')}}{\omega - \mathrm{i}\alpha\lambda k^2} \tag{5}$$

という関数は方程式 (3) を満たすことを示せ。また，そのような $C$ と $\alpha$ を求めよ。

4. 式 (5) において，まず $\omega$ についての積分を，$t<t'$ および $t>t'$ それぞれの場合について行え。ただし，設問3で得られた $C$ と $\alpha$ の値を用いること。

5. さらに式 (5) の $k$ についての積分を行い，$t<t'$ および $t>t'$ それぞれの場合について，$G(t,x,t',x')$ の具体的な関数形を求めよ。ただし，必要であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{6}$$

という公式を用いよ。

6. 関数 $S(t,x)$ が

$$S(t,x) = \delta(t)\cos(px) \tag{7}$$

という形に与えられているとする。ただし，$p$ は実定数である。このとき $t<0$ で $f(t,x)=0$ となるような $f(t,x)$ を求めよ。また，得られた関数 $f(t,x)$ について，$t$ をある正の値に固定した場合の最大値と，その最大値を与える $x$ を求めよ。