

平成15年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成14年8月27日(火) 12時30分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用すること。
3. 問題は全部で9問ある。9問からから**5問を選んで**解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計5枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に**科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号**を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

問題 1

高さ無限大の壁に囲まれた幅 $2L$ の一次元井戸型ポテンシャルに、高さ無限大で幅が L に比べて十分小さいポテンシャル障壁を設け、質量 m の粒子を左半分 (幅 L) に閉じこめる (図 1)。井戸型ポテンシャルの底をエネルギーの原点とする。

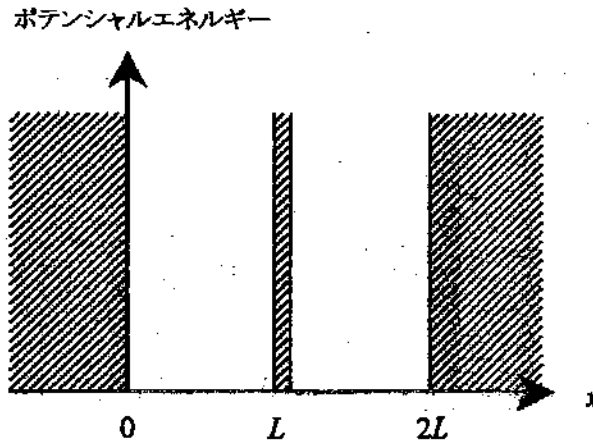


図 1

1. 粒子が量子力学的な基底状態にあるとして、そのエネルギー E_0 を求めよ。
2. ポテンシャル障壁を突然取り去って、粒子が幅 $2L$ のポテンシャル井戸全体を動けるようにする。このとき、粒子が基底状態にある確率を求めよ。またエネルギー期待値はいくらか。
3. ポテンシャル障壁を取り去った時刻から t 秒後の粒子の波動関数を $\psi(x, t)$ とする。いま仮に $\psi(x, t)$ がわかったとしよう。時刻 t において粒子の位置を観測したとき、粒子が井戸の左半分で見つかる確率は、この $\psi(x, t)$ を用いてどのように書けるか。ただし、 $\psi(x, t)$ は規格化されているとする。
4. 上記の $\psi(x, t)$ の表式を求めよ。ただし級数和はそのまま残してよい。
5. 今度は設問 1 の状態からポテンシャル障壁をきわめてゆっくりと右端まで動かす場合について考えよう。このようなゆっくりとしたポテンシャルの変化に対しては断熱定理が成り立ち、粒子は連続的に移り変わることのできる量子数の同じ固有状態にとどまる。このことを使って、粒子が幅 $2L$ のポテンシャル井戸全体を動けるようにした後の粒子のエネルギー期待値を、設問 1 で求めた E_0 を用いて表せ。

6. 上記の断熱定理が成り立つことを、以下の手順で示せ。

左側のポテンシャル井戸の幅が a のとき ($L \leq a \leq 2L$) に粒子が取り得る固有状態を $\phi_n(x, a)$ 、その固有エネルギーを $\epsilon_n(a)$ (n は負でない整数) と書く。 $\phi_n(x, a)$ は規格直交化されているものとする。 $t=0$ で基底状態にいた粒子の、時間 t での波動関数をつぎのように展開する。

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(x, a) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \epsilon_n(a) d\tau \right\}.$$

a が時間に依存することに注意して、時間に依存する波動方程式から、係数ベクトル $\{c_n(t)\}$ の満たすべき関係式が次の形に書けることを示し、 a や t によらない係数行列 J_{mn} の表式を求めよ。

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = - \sum_m c_m(t) \frac{1}{a} \frac{da}{dt} J_{mn} \exp \left\{ +\frac{i}{\hbar} \int_0^t [\epsilon_n(a) - \epsilon_m(a)] d\tau \right\}.$$

ただし $J_{nn} = 0$ である。

次にこの関係式を用いて、ある条件の下で断熱定理 ($c_n(t) \simeq c_n(0)$) が成り立つことを説明せよ。

7. ポテンシャル井戸の左半分に閉じ込められた粒子を、運動エネルギー E_0 の古典粒子だとする。設問5と同様に壁をゆっくりと (断熱的に) 右端まで動かしたあとのエネルギーが、設問5で求めた量子系の結果と同じであることを示せ。ただし、粒子は壁と弾性衝突 (はねかえり係数1) するとし、壁を動かしている間に粒子は壁と十分多くの回数衝突するとせよ。

問題2

イオン半径のほぼ等しい2種の元素 A、B を高温で溶かして均一に混ぜ合わせ、その後急冷して、温度 T で合金 (固溶体) を作る。元素 A、B は濃度比によらず格子定数が一定の単純立方格子を作ると仮定する。また、原子 A と A、B と B が最近接で隣り合うときの相互作用エネルギーは等しくその大きさを a 、A と B が最近接で隣り合うときの相互作用エネルギーの大きさを b であるとし、これ以外には相互作用は働かないとする。A どうし、B どうしが隣り合う方が、A、B が隣り合うよりもエネルギーが低く、 $a < b$ が満たされているとする。ただし、合金中の A、B の原子数濃度は等しいとする。

1. 格子点 i が A 原子で占められているときを $\sigma_i = 1$ 、B 原子で占められているときを $\sigma_i = -1$ とする変数 σ_i を使うと、この合金のモデルのハミルトニアンは

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} (P\sigma_i\sigma_j + Q)$$

という形に書けることを示し、 P と Q を a 、 b を用いてあらわせ。ただし、 $\langle i, j \rangle$ は最近接格子点の組である。ここで今の場合、A、B が 50% ずつなので、対称性から化学ポテンシャルの項 $-\mu \sum_i \sigma_i$ は必要ないことを注意しておく。

2. この系の場合、 σ_i の平均値 $p = \langle \sigma_i \rangle$ の値はいくつか。
3. ハミルトニアンの中の相互作用を表す項 $\sigma_i\sigma_j$ を定数 m を用いて、 $(\sigma_i + \sigma_j)m - m^2$ と置き換える近似を行ない

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} [P\{(\sigma_i + \sigma_j)m - m^2\} + Q]$$

と表わす。 m を設問 2 で決まっている σ_i の一様な平均値 $m = p = \langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ で与えるならば、この近似は相互作用の相手を平均値で置き換えることになり、「平均場近似」と呼ばれる。しかし、ここではより一般に m をパラメタと考える。すなわち、上記の近似での平均値 m が設問 2 で与えられる系全体の平均値 p と関係なく与えられるとしたときに、上記のハミルトニアンで与えられる系の分配関数 Z と自由エネルギー F

を m 、 N 、 a 、 b および温度 T の関数として表わせ。ただし系の全格子点数は N であり、周期的境界条件下にあるとしてよい。以下、ボルツマン定数を k_B とする。

4. 設問3で求めた自由エネルギー F を m が小さいと考えて m の4次まで展開した表式は $F = u + vm^2 + wm^4$ と書ける。 u 、 v 、 w を N 、 T 、 a 、 b を用いて表わせ。
5. もしも m が自由に選べて、設問4で展開して4次まで求めた自由エネルギーが最小になる m が実現されるとすると、 m は温度の関数としてどのようにふるまうか。 $k_B T > 2(b-a)$ の範囲でおおざっぱに m と T の関係を表わすグラフも書け。
6. 設問4で求めた自由エネルギーの表式を用いて、この系の温度を下げてくるときに、この合金系の熱平衡状態でどのような相転移が生ずるか、説明せよ。ただしA、Bの組成比が決まっているときに、物体全体では σ_i の平均値 m の値は設問2の値で決まっています固定されていることに注意せよ。

問題 3

真空中に無限に長い直線状導線と半径 R [m] の無限に長い中空の円筒導体が図 1 のように置かれている。導線は円筒の中心 O から x 軸方向に x_0 [m] ($0 \leq x_0 < R$) の位置にあるものとする。任意の点 A (中心 O から距離 r [m]、 x 軸からの角度 ϕ [rad]) での動径方向と円周方向の電場を E_r, E_ϕ [V/m]、磁束密度を B_r, B_ϕ [Wb/m²] とし、以下の設問に答えよ。ただし、真空中の誘電率と透磁率を ϵ_0, μ_0 とし、SI 単位系 (MKSA 単位系) を用いるものとする。

まず、導線が円筒の中心 O にある場合 ($x_0=0$) を考える。以下の設問に答えよ。

1. 導線に電流 I [A] が紙面の下から上の方向に、円筒導体にはその反対方向に電流 I [A] が一様に流れているとする。円筒内 ($r < R$) 及び円筒外 ($r > R$) の各領域で、磁束密度 B_r, B_ϕ [Wb/m²] を求めよ。

2. 導線が λ [C/m] の線電荷密度 (単位長さ当りの電荷) で一様に帯電している場合を考える。ただし、円筒は接地されているものとする。

(a) 円筒内 ($r < R$) 及び円筒外 ($r > R$) の各領域で、電場 E_r, E_ϕ [V/m] を求めよ。

(b) 円筒面に生じる面電荷密度 σ [C/m²] と単位長さ当りの総電荷量 λ_t [C/m] を求めよ。

(c) 円筒が接地されずに絶縁されていた場合、電場は円筒内と円筒外でどうなるか。ただし、絶縁前に帯電はされていないものとする。

次に、導線が円筒導体の中心 O からずれている場合 ($0 < x_0 < R$) を考える。以下の問いに答えよ。

3. 設問 1 と同様に、導線に電流 I [A] が紙面の下から上の方向に、円筒導体にはその反対方向に電流 I [A] が一様に流れている。円筒外 ($r > R$) での磁束密度 B_r, B_ϕ [Wb/m²] を求めよ。

4. 設問 2 と同様に、導線が λ [C/m] の線電荷密度 (単位長さ当りの電荷) で一様に帯電している。ただし、円筒は接地されているものとする。

(a) 円筒導体に対する電気映像が、中心 O から x 軸方向に R^2/x_0 離れた位置にある線電荷密度 $-\lambda$ の無限に長い導線であることを示し、円筒内での電場 E_r, E_ϕ [V/m] を求めよ。

(b) 円筒面に生じる面電荷密度 σ [C/m²] を求めよ。

(c) 円筒を左右半分に分けて考えた時、 $x > 0$ の部分 ($0^\circ \leq \phi < 90^\circ$ 及び $270^\circ < \phi \leq 360^\circ$) と $x < 0$ の部分 ($90^\circ < \phi < 270^\circ$) の半円筒面に帯電する単位長さ当りの電荷 λ_+, λ_- [C/m] をそれぞれ求め、

$$\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} = S \cdot x_0$$

となる S を求めよ。ただし、 $x_0 \ll R$ として考えよ。

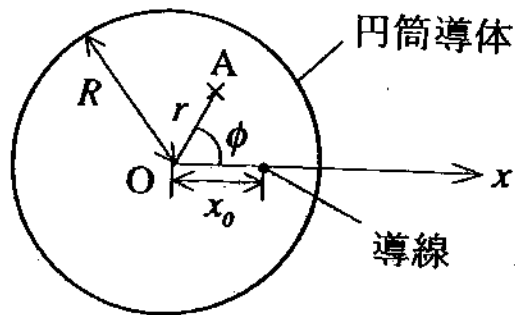


図 1

問題 4

1. 半径 a , 厚さ $d (\ll a)$, 一様な密度 ρ の薄い円板の, 中心をとおり面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント I_z , および中心を通り面に平行な軸のまわりの慣性モーメント I_x を求めよ。
2. 半径 a , 質量 M の一様な球の, 質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントが

$$I = \frac{2}{5} M a^2$$

であることを示せ。

3. この球を摩擦のある水平な面に置き, 中心の高さを中心に向かって水平に突いて初速 v_0 を与えた。球と面の静止摩擦係数を μ , 動摩擦係数を μ' とするとき, 球が滑らずに転がるようになるまでの時間と, それまでに質量中心が進む距離を求めよ。また滑らずに転がるようになってからの質量中心の速さ v と回転の角速度 ω を求めよ。ただし, 以下の設問も含め, 転がり摩擦は無視するものとする。
4. 図 1 のように, 面が前方で傾斜角 θ の上り斜面になっているとする。 θ がある値より大きいと, 滑らずに転がってきた球は滑りながら斜面を上るようになる。その θ の値を求めよ。ただし, 斜面の下端は図 1 のように十分短い範囲で緩やかに変化しており, 斜面全体にわたって摩擦係数は水平な部分と同じであるとする。



図 1

5. 前方の斜面の部分に摩擦があり球が滑らずに転がって上る場合と, 斜面の部分で摩擦がない場合では, 球はどちらが高くまで上ることができるか。理由を付けて簡単に説明せよ。

問題 5

物理実験において、測定値とその誤差の取り扱いは非常に重要である。これらに関する以下の設問に答えよ。

1. 実験誤差は大きく系統誤差と統計誤差の2つに分けられる。統計誤差は測定値をばらつかせるもので、多くの場合には一定の確率分布に従う。一方、系統誤差とはどのような内容のものか。例を挙げて簡潔に(100字程度で)説明せよ。

以下の設問では、統計誤差だけを考え、その確率分布はガウス分布に従うと仮定する。

2. ある物理量の測定を同一条件で N 回行ったとする。これらの測定は独立で、 i 回目の測定値が x_i であったとする。もっとも確からしい物理量の値(最尤値) X は最小二乗法の考え方により、

$$S = \sum_{i=1}^N (x_i - X)^2$$

を最小にする X として求められる。 X を求めよ。

3. 設問2の場合、測定の標準偏差はどのように求められるか。
4. 設問2の場合、最尤値 X の誤差(真の値からの差の絶対値) δX はどのように推定されるか。 N を大きくしたときに、その誤差はどのようになるか。
5. 設問2および4の結果、最尤値とその誤差がそれぞれ X 、 δX であった。一方、独立な物理量の測定を同様に行い、最尤値とその誤差がそれぞれ Y 、 δY であった。このとき、物理量の和、 $X + Y$ 、に対する誤差を導け。結果だけでなく、どうしてそうなるかを説明せよ。ただし、 $\delta X \ll |X|$ 、 $\delta Y \ll |Y|$ とする。
6. 設問5と同様に、物理量の積 XY 、および商 X/Y に対する誤差を導け。
7. ある物理量 X に対する M 個の設定値 $X_k (k = 1, \dots, M)$ について、それと相関のある別の物理量 Y を測定した。1つの設定値 X_k に対して N 回の測定を繰り返し、設問2および4の方法で、最尤値 Y_k とその誤差 δY_k を求めた。 X_k と Y_k の間には直線関係が予想されたので、 $Y_k = pX_k + q$ の関係式で近似したい。最小二乗法の考え方をを用いて、もっとも確からしい p と q の値を求めよ。ただし、 X_k の誤差はないものとする。

問題6

図1に示すように炭素イオン（荷電状態 $q = +2$ ）が水素プラズマを通過する時の荷電状態の変化及びエネルギー損失を測定する実験を行なった。炭素イオンの入射エネルギーは核子当り 350 keV（速度は 8.2×10^6 m/s）である。以下の設問に筋道を示して答えよ。必要であれば以下の値を用いよ。

炭素の質量数 $A = 12$ 、原子番号 $Z = 6$ 、光速 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s、核子質量 $m_n = 1.7 \times 10^{-27}$ kg、電荷単位 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C。また必要であれば $\exp(2.0) = 7.4$ の値を用いよ。

この実験において水素プラズマは陽子と電子に完全に電離し、それぞれの密度は空間的に一様で n であり、また時間的にも定常な状態であるとする。その厚さを d とする。

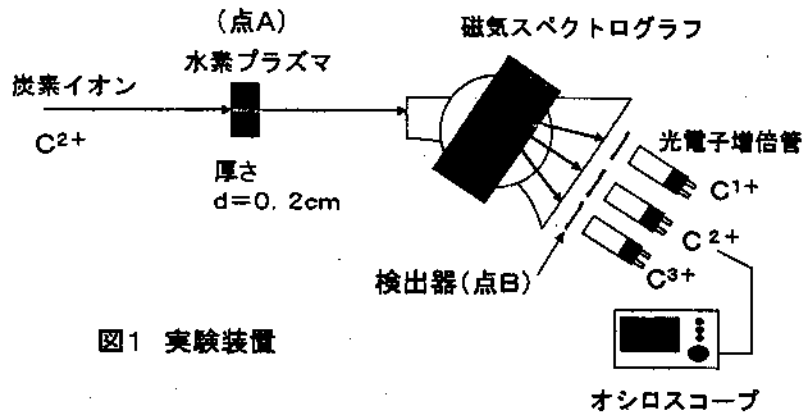


図1 実験装置

1. 炭素イオンは水素プラズマ内の陽子及び自由電子と相互作用をして、電子が剥ぎ取られる電離と、自由電子を捕獲する再結合が行なわれ荷電状態が変化する。その反応断面積をそれぞれ σ_i 、 σ_r とする。これらの値は衝突のエネルギー、運動量によらないものとする。プラズマに N_0 個の $q = +2$ のイオンが入射されるとする。以下の設問において、一度変化した炭素イオンの荷電状態がさらに変化する現象は無視してよい。

(a) プラズマ表面から炭素イオンの進む方向に向かった距離を x とするとき ($0 \leq x \leq d$)、 x の点で $q = +2$ にとどまっているイオンの数 $N_2(x)$ を表す式を求めよ。

(b) イオンは再結合により $q = +1$ 、電離により $q = +3$ 、となるが、入射点から x の点までの間に生成される、それぞれのイオン数 $N_1(x)$ 、 $N_3(x)$ を表す式を求めよ。

(c) $\sigma_i = 1.0 \times 10^{-17}$ cm²、 $\sigma_r = 1.0 \times 10^{-22}$ cm²、 $n = 1 \times 10^{18}$ cm⁻³、 $d = 0.2$ cm とする時、プラズマ通過後、荷電状態が $q = +1, +2, +3$ 状態となっている割合はいくらか。

2. プラズマ通過後の荷電状態を調べるために図1に示すように磁気スペクトログラフ（図中で紙面に垂直に磁場をかけ、荷電粒子を曲げる装置）を用いて炭素イオンの荷電分布を調べた。スペクトログラフの磁束密度 $B = 0.1$ T（ここで T = Wb/m²）とする時、スペクトログラフ内での

$q = +1, +2, +3$ に対応する曲率半径 ρ_1, ρ_2, ρ_3 はいくらか。

3. 上記磁気スペクトログラフの磁場を測定したい。

(a) 磁束密度の方向、つまりS極とN極を確かめたい。電池と針金を用いて確かめるにはどうすればよいか。図を描いて説明せよ。

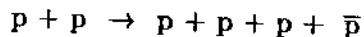
(b) 磁束密度 B を測定する方法を一つあげ、その原理を簡単に説明せよ。

4. プラズマ中でのイオンのエネルギー損失 ΔE を、プラズマ出口 (図中の点A) から検出器 (点B) までの飛行時間を測定して求める。プラズマが無い時とある時の飛行時間差 Δt と ΔE の関係式を求めよ。但し点Aから点Bまでの距離を L_0 とする。 $L_0 = 4\text{ m}$ 、炭素イオンのエネルギーが核子あたり $E = 350\text{ keV}$ の時、 $\Delta t = 5$ ナノ秒であった。 ΔE はいくらになるか。

5. 前問において用いるイオン検出器として、プラスチックシンチレーター、NaIシンチレーターの2種類を用意した。上記の実験に用いるにはどちらのシンチレーターが適当であるかを理由を示して述べよ。

問題 7

相対論的な高エネルギー陽子 (p) ビームを静止している陽子 (p) ターゲットに照射することにより、陽子 (p) と反陽子 (\bar{p}) の対を生成する反応:



を考える。ここで陽子の質量を $m_p (= 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})$ 、陽子の電荷を $e (= 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$ 、真空中の光速度を $c (= 3.0 \times 10^8 \text{ m/s})$ とする。

1. 左手座標系で $+z$ 方向に磁束密度の大きさが B (Wb/m^2) の一様磁場をかけたとする。実験室系で運動量の大きさが P_p ($\text{kg}\cdot\text{m/s}$) の高エネルギー陽子が x 軸上を $+x$ 方向に磁場と垂直に入射された場合、陽子は回転運動を始める。その回転軸と回転方向を磁場と陽子の運動方向も含めて図示せよ。また、その回転運動の曲率半径を P_p 、 B 、 e を用いて表せ。
2. 陽子と反陽子の持つ固有の物理量のうち、等しくなる例と異なる例をそれぞれ 2 つずつ挙げよ。
3. 設問 2. で挙げた陽子と反陽子の性質の差異を用いて、陽子と反陽子を区別する手段を 2 通り簡潔に述べよ。
4. 上記反応の始状態で x 軸上を $+x$ 方向に入射されたビーム陽子が実験室系で持つ運動量の大きさを P_p とする。ビーム陽子とターゲット陽子の実験室系での全エネルギーと運動量を P_p 、 m_p 、 c を用いて各々書き表せ。また、ビーム陽子が重心系で持つ運動量の大きさを P_p^* とする。ビーム陽子とターゲット陽子の重心系での全エネルギーと運動量を P_p^* 、 m_p 、 c を用いて各々書き表せ。ただし、本設問以下において磁場はかかっているものとする。
5. 上記の反応を生じさせるのに必要な高エネルギー陽子ビームの実験室系での最低運動エネルギー E_{\min} を m_p と c を用いて表せ。
6. 陽子ビームの運動エネルギーを上記反応の起こる最低運動エネルギー E_{\min} とする。この反応の始状態を重心系で見たときに、実験室系で静止していたターゲット陽子の重心系での速さ v^* は光速度 c の何倍になるかを計算せよ。また、終状態の反陽子の実験室系での運動量の大きさを m_p と c を用いて表せ。

問題 8

図1は、ある球状蛋白質の熱転移（熱によるアンフォールディング転移）を、示差走査型熱量計と230 nmにおける円二色性を用いて測定した結果を示す。測定は1気圧の一定圧力下にて行なった。Aは、蛋白質水溶液の熱量計データ、Bは蛋白質を溶かした緩衝溶液の熱量計データ、Cは円二色性の温度依存性を示す。図1のデータより、温度 T におけるアンフォールディング転移の熱力学量（標準 Gibbs 自由エネルギー変化 $\Delta G(T)$ 、エンタルピー変化 $\Delta H(T)$ 、エントロピー変化 $\Delta S(T)$ など）を求めることができる。図2は、このようにして得られた熱力学量をもとにして、 ΔG の温度依存性を描いた理論曲線である。以下（次頁）の問いに答えよ。ただし、この蛋白質の熱転移は二状態転移で近似できるものとする。

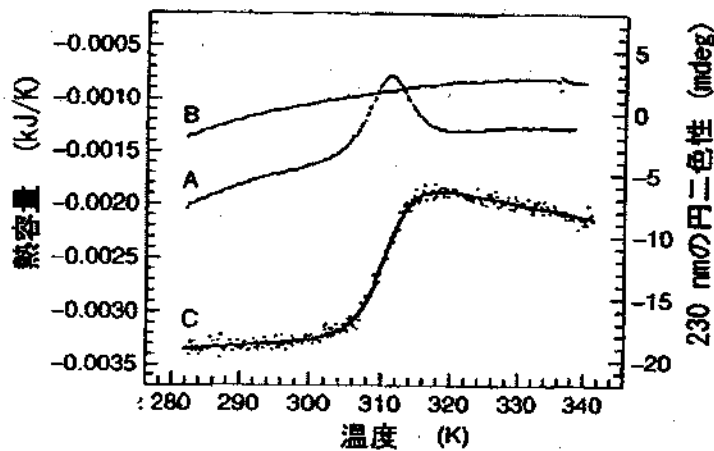


図1: ある球状蛋白質の熱転移。A: 示差走査型熱量計による測定結果。B: 示差走査型熱量計のベースライン (Aと同じ測定を溶媒緩衝液に対して行った)。C: 円二色性の測定結果 (点は測定点、実線は転移曲線を示す)。

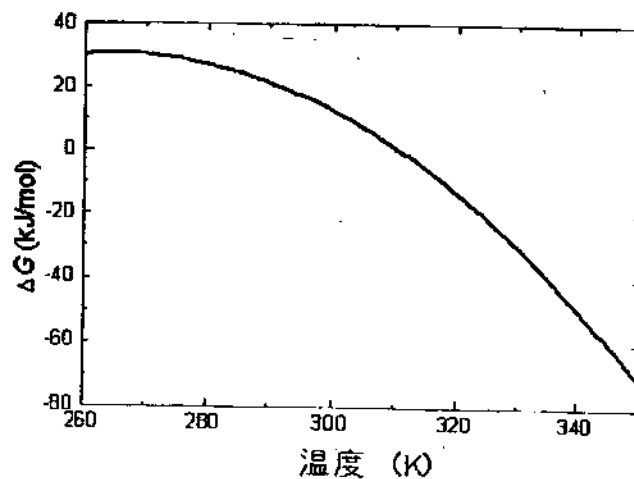
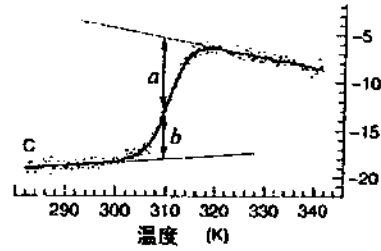


図2: ΔG の温度依存。

1. 二状態転移が成立するので、図1中のCの転移曲線より転移前後の円二色性の温度依存を直線的に外挿し、転移領域での転移の割合 f_{app} を $f_{app} = b/(a+b)$ として求めることができる（右図参照）。このとき、転移領域における転移の平衡定数 K と標準自由エネルギー変化 ΔG はどのように与えられるかを示せ。



2. 平衡定数 K と熱転移の van't Hoff エンタルピー変化 ΔH_{vH} に関する以下の関係式

$$\Delta H_{vH} = RT^2 \frac{\partial \ln K}{\partial T}$$

を導け。ただし、ここで R は気体定数を表す。必要であれば、自由エネルギーとエンタルピー及びエントロピーに関する関係式 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ を用いてよい。

3. 熱量計により直接観測したエンタルピー変化 ΔH_{cal} を図1中のAとBより求めることができる。その方法について、必要であれば図を描いて、説明せよ。
4. ΔH_{vH} と ΔH_{cal} と間にはどのような関係が成立するか。また、熱転移が二状態転移では近似できず、中間状態をとる場合、これらの間の関係はどのようなになるか。
5. 熱転移点の温度 T_m 、熱転移にともなう定圧熱容量変化 ΔC_p とし、 ΔC_p は温度によらず一定と見なすことができる。このとき、任意の温度 T における、自由エネルギー変化 $\Delta G(T)$ は以下の関係式で表されることを示せ。

$$\Delta G(T) = \Delta H(T_m) + \Delta C_p \cdot (T - T_m) - T \left(\Delta S(T_m) + \Delta C_p \ln \frac{T}{T_m} \right)$$

6. 図1中のCのデータでは、230 nmの円二色性の強度が熱転移にともなって減少している。円二色性と蛋白質の立体構造との関係について述べ、熱転移にともなう円二色性の変化が立体構造のどのような変化によりもたらされたかを説明せよ。
7. 蛋白質の熱転移は、一般に、大きな ΔC_p をともなうため、 ΔG の温度依存には図2のような曲率が生じ、蛋白質は T_m における熱転移とともに、低温側の T_c における冷却転移も示す (T_c が水の氷点より低くなり、現実には観測できないことが多い)。蛋白質の熱転移と冷却転移の起こる分子的なメカニズムについて、それぞれ、知れることを述べよ。

問題9

慣性モーメント I をもった異核2原子分子の回転運動について、次の間に答えよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とし、比熱は1分子あたりの比熱とする。

1. 古典統計力学を使って、この系の温度 T での回転運動の比熱を求めよ。
2. この系の回転運動を表すハミルトニアは

$$H = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

である。回転量子数 l ($l = 0, 1, 2, \dots$) を使って、このハミルトニアンの固有値 E_l とその縮重度 g_l を表せ (導出過程は不要)。

3. この系の分配関数 Z とエネルギー期待値 (E) を、 E_l 、 g_l 、温度 T を使って表せ。
4. 低温極限で有効な近似を用いて Z の表式を求め、その近似の範囲で、系の比熱 $C(T)$ を E_l 、 g_l 、 T を使って表せ。またその近似が成り立つ条件について述べよ。

次に慣性モーメント I の等核2原子分子の回転運動について考える。2つの原子の原子核はともにスピン $1/2$ のフェルミ粒子であるとして、次の間に答えよ。ただし電子系の合成スピンはゼロであるとする。

5. 核の合成スピンはどのような値を取り得るかを考え、それぞれの場合について回転運動のエネルギー固有値と縮重度を求めよ。
6. 設問5で求めたエネルギー固有値の具体的な表式を使って、低温極限での回転運動の比熱を求めよ。
7. 十分高温で熱平衡に達した分子気体を急冷した直後に測定した低温比熱 C_1 と、熱平衡を保ちながらきわめてゆっくり冷却した後測定した低温比熱 C_2 では、違いがあったという。その理由として考えられることを簡単に述べよ。ただしいずれの場合も、分子気体は冷却後も気体のままであったとする。