

平成17年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成16年8月31日（火） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1、第2、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

第1問

幅 a , 深さ $-V_0$ (< 0) の一次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ を考える(図1)。質量 m の粒子が, $x = -\infty$ から波数 k の平面波 e^{ikx} で入射すると, その一部は反射し, 一部は透過する。このとき, $x < -a/2$ と $x > a/2$ における波動関数を, それぞれ $\psi = e^{ikx} + Re^{-ikx}$, $\psi = Te^{ikx}$ とし, また $-a/2 \leq x \leq a/2$ における波動関数を $\psi = \alpha e^{ipx} + \beta e^{-ipx}$ として, 以下の設問に答えよ。ただし, $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。

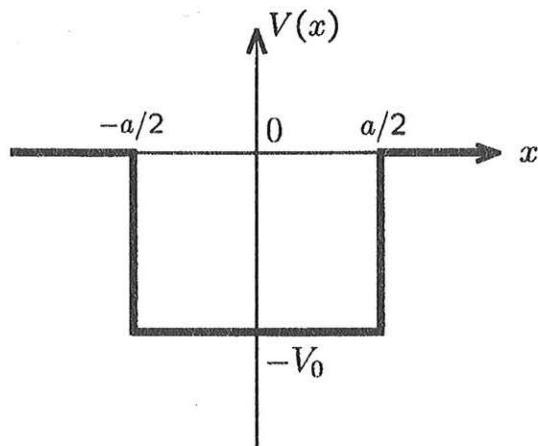


図1

1. 入射波, 反射波, 透過波に対するフラックス(確率密度の流れ)を, \hbar, m, k, R, T を用いて表せ。また T と R の関係式を与える。

2. $T = |T|e^{i\theta}$ と書くとき, 位相 θ が現れる物理的理由を簡潔に述べよ。

3. p を \hbar, m, k, V_0 を用いて表せ。

4. T を以下の式のように表すとき, A と B を k と p を用いて表せ。

$$T = \frac{e^{-ika}}{A \cos(pa) - iB \sin(pa)}$$

5. 入射した波が反射を全く受けない(完全透過する)ための k が満たすべき条件を求めよ。
また, 完全透過がおこる物理的理由を簡潔に述べよ。

6. $|T|^2$ を k の関数として図示せよ。

第2問

金属中の伝導電子系をフェルミ・ディラック統計に従う自由電子気体と見なす単純なモデルを考える。図1に示したように、金属内部を表す一辺 L の立方体の箱の中はポテンシャルがゼロで、外部は $V(>0)$ になっているものとする。この中に N 個の電子が存在する。このとき以下の設問に答えよ。ただし、電子の質量を m 、ボルツマン定数を k_B 、 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。なお、設問2以降では、 L および N が十分に大きいとし、エネルギー準位の分布はほぼ連続と見なしてよい。

1. V が十分に大きいものとし、波動関数 $\psi(x, y, z)$ に周期的境界条件

$$\psi(x+L, y, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y+L, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z+L) = \psi(x, y, z),$$

を適用することによって、箱の中の電子状態を表わす固有関数と固有エネルギーを求めよ。

2. 状態密度 $g(\varepsilon)$ を求めよ。状態密度とは、エネルギーが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の範囲にある単位体積あたりの電子状態の数を $g(\varepsilon)d\varepsilon$ と表したときの $g(\varepsilon)$ である。

3. 温度 $T = 0$ における化学ポテンシャル（フェルミ準位） μ_0 と、電子の数密度 $n = N/L^3$ との関係を求めよ。

4. 温度 $T > 0$ では高いエネルギー状態にも有限の確率で電子が分布するので、一部の電子は表面から外部（真空中）に飛び出すことができる。表面に垂直で外向きの方向を $+z$ 軸として、単位面積から単位時間に外部に流れ出す電子の数 J_n を、フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ 、電子の z 方向の速度 v_z を含む三次元波数空間での積分として表せ。その際、三次元波数空間の積分範囲を明示せよ。

5. $k_B T \ll (V - \mu)$ （ただし μ は有限温度での化学ポテンシャル）という近似のもとで設問4の積分を実行することにより、表面から単位時間、単位面積あたりに外部に流れ出す電子の数が

$$J_n = \frac{4\pi m (k_B T)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{V - \mu}{k_B T}\right)$$

となることを示せ。

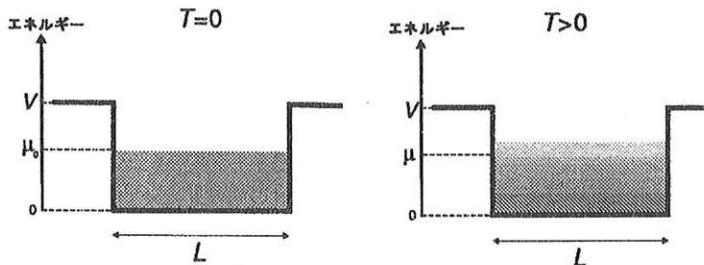


図1

第3問

真空中で、高い強度の単色光（電磁波）と自由電子（質量 m , 電荷 $-e$ ）との相互作用を考える。電子にはたらく力 $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (\mathbf{E} , \mathbf{B} はそれぞれ光の電場と磁束密度, \mathbf{v} は電子の速度) のうち、光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さいのはどのような場合かを具体的に考察しよう。空間内のある点で、 x 方向に直線偏光した角振動数 ω を持つ単色平面波の電場を $E_x = E_0 \sin \omega t$ と表すとき、以下の設問に答えよ。ただし、真空中での光の速さを c とする。

1. 光の電場の振幅 E_0 と磁束密度の振幅 B_0 の比 E_0/B_0 が c であることに注意し、電子にはたらく力のうち、光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さくなるための \mathbf{v} の大きさに関する条件を求めよ。

以下の設問 2, 3, 5 では、設問 1 で考察した光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さく、無視してよい場合を考える。

2. 時刻 $t = t_0$ で電子の速度が 0 であったとする。時刻 $t > t_0$ における光の電場 E_x 中での電子の運動エネルギーを求めよ。
3. 設問 2 で求めた運動エネルギーについて、光の電場の 1 周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる平均を求めよ。また、求めた平均が取りうる最小値を明示し、その物理的意味を簡潔に説明せよ。時間に依存するある物理量 $u(t)$ の 1 周期にわたる平均 $\langle u(t) \rangle$ は、

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t') dt'$$

で定義される。

4. 光の強度 I [W/m²] がポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times (\mathbf{B}/\mu_0)$ (μ_0 は真空の透磁率) の大きさの 1 周期平均に相当することに注意し、電場の振幅 E_0 を光の強度 I と $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ (ϵ_0 は真空の誘電率) を含む式で表せ。 Z_0 は真空の放射インピーダンスと呼ばれる。
5. 電子の運動エネルギーについて、設問 3 で求めた平均が取りうる最小値を U と書く。設問 4 の結果を用い、 U [J] の表式を、光の強度 I [W/m²], その波長 λ [m], 電子の質量 m [kg] と電荷の大きさ e [C], 光の速さ c [m/s], および Z_0 を用いて表せ。
6. 設問 5 で得られた U の表式に光の強度 I と波長 λ 以外の物理量を代入すると、数値係数は 1.5×10^{-24} s となる。いま、 $\lambda = 0.8 \mu\text{m} = 8 \times 10^{-7}$ m のとき、 $I < 10^{18}$ W/m² であれば、設問 1 で考察したように、電子にはたらく力のうち、光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さいことを示せ。ただし、 $m = 9 \times 10^{-31}$ kg とする。

第4問

I ガンマ線と物質との相互作用に関して以下の設間に答えよ。

- 物質によるガンマ線の減衰を測定するために、エネルギーが E のガンマ線を一定の強度で等方に放出するガンマ線源(S), 厚さ x の物質(O), ガンマ線検出器(D)を、図1のように配置して実験を行った。なお、Dは波高分析装置(PHA)に接続されており、エネルギー E をもつガンマ線だけをカウントすることができる。

T 秒間の測定により得られたカウント数は、 Y ($Y \gg 1$) であった。次に、Oを取り除いて同じく T 秒間測定し、カウント数を求めるとき、 Y_0 であった。さらに、Sを取り除いたときの T 秒間のカウント数は 0 であった。この物質 O の微小厚さ Δx で失われるガンマ線の割合が、 $\mu \Delta x$ であるとして、 μ を、 x , Y , Y_0 を用いて表せ。

- カウント数の統計誤差に起因する μ の実験誤差を求めよ。なお、この実験装置の不感時間は無視できるとしてよい。

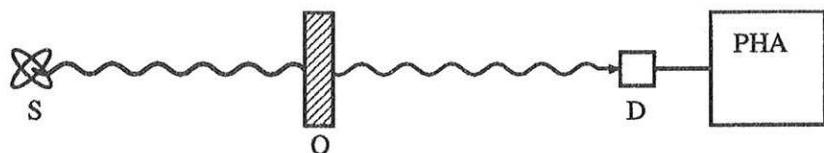


図 1

- ガンマ線と物質内の原子との相互作用に関して、主要な過程は 3 つある。図2(a), (b)にはこのうち、2つを模式的に示し、また、図3の A, B, C の曲線は、ゲルマニウムに対する、それからの μ への寄与を示す。図2(a)および(b)の過程はそれぞれどう呼ばれているか、またそれが図3の A, B, C のどれに対応するかを答えよ。さらに、残りの過程の名称を答え、その特徴を示す模式図を図2にならって描け。

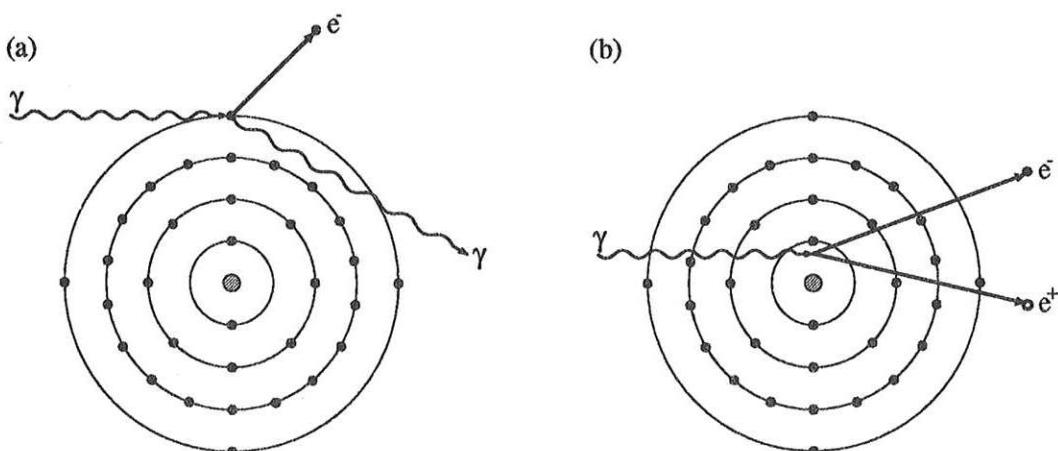


図 2

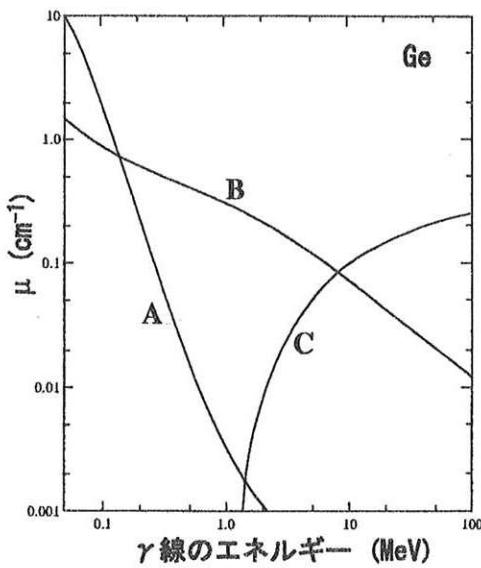


図 3

II 原子核や素粒子の崩壊によって放出されるガンマ線に関する以下の設問に答えよ。

1. 図 4(a) のように、ある励起した原子核 A^* は、その静止系で、1.4 MeV のエネルギーのガンマ線を放出して原子核 A に崩壊する。実験室で原子核反応により励起した原子核 A^* を生成したところ、実験室系での速さが光速 c の 80 % であった。図 4(b) に示すように、実験室系で、崩壊前の A^* の速度ベクトルの方向に対するガンマ線の放出角度を θ_L とする。 $\theta_L = 60^\circ$ でガンマ線を観測すると、観測されるガンマ線のエネルギーはいくらになるか。有効数字 2 桁で答えよ。

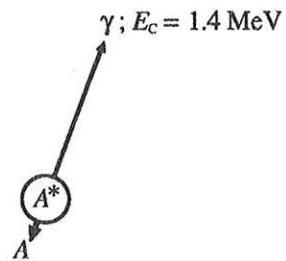
なお、実験室系の z 軸方向に速さ $v = \beta c$ で静止系が運動しているとき、静止系における 4 元反変ベクトル X_C と実験室系における 4 元反変ベクトル X_L は、ローレンツ変換

$$X_C = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} X_L$$

で関連づけられる。ただし、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。

2. π^0 中間子 (質量 m) は、主に 2 個のガンマ線に崩壊する。実験室でこの崩壊が観測されたとき、2 個のガンマ線のそれぞれのエネルギー (E_1 および E_2)、2 個のガンマ線の方向ベクトルのなす角度 θ 、および m との間にどのような関係が成り立つかを示せ。なお、光速を c とせよ。

(a) 静止系



(b) 実験室系

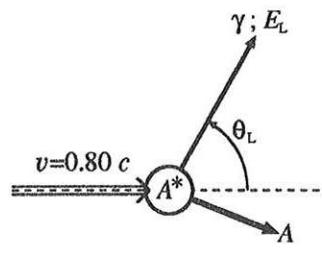


図 4

第5問

放電管のスペクトルを調べるために、分光器を使って図1のような実験を行った。放電管から出た発光は、凸レンズによって入口スリット S_1 上に集光される。 S_1 を通った光線は、凹面鏡1によって平行光線となり、回折格子Gに入射する。回折光は凹面鏡2によって出口のスリット S_2 上に集光されて、光電子増倍管によって検出される。Gを回転することにより、 S_2 から出てくる光の波長を変化させることができる。

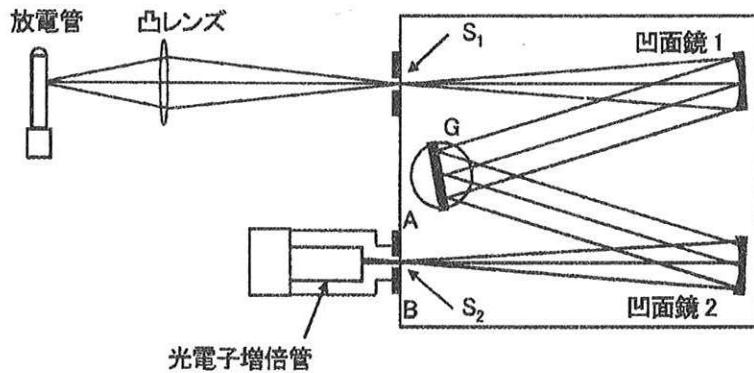


図1:

分光器の働きを理解するために、まず回折格子について考察する。回折格子の拡大図を図2に示す。ただし、取り扱いを簡単にするために、溝の部分からの反射はまったくなく、平らな部分（反射面）の幅は溝に比べて十分に狭いと仮定する。入射光、回折光が回折格子の法線となす角度をそれぞれ α , β , 入射光の波長を λ , 格子の間隔を D とする。 $j = 1, \dots, N$ は反射面の番号である。以下の設間に答えよ。

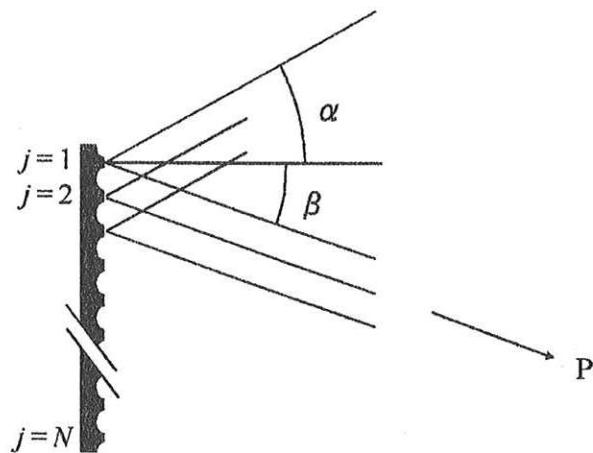


図2:

- 十分遠方の点Pにおける、 j 番目と $j+1$ 番目の反射面からの回折光の位相差 ϕ を求め、回折光が強くなるための条件を、 α , β を含む式で書け。ただし、空気の屈折率は1と考えてよい。

2. $j = 1$ の反射面からの回折光の点 P における電場が、複素表示で

$$E = E_0 \exp(i\omega t)$$

と与えられるとして、N 本の反射面からの回折光をたし合わせた電場 E_{tot} を、 ϕ を含む複素表示で書け。ただし、 E_0 は α, β によらないものとする。

3. 点 P における回折光強度は $|E_{\text{tot}}|^2$ に比例する。 $|E_{\text{tot}}|^2$ の $\phi = 2\pi$ 近傍でのふるまいを、 ϕ の関数として図示せよ。なお、最大値および、極大、極小など特徴的な点の ϕ 座標を記入すること。

つぎに、図 1 に示した実際の分光器に単色光を入射した場合について考察する。

4. 設問 3 で、 $\phi = 2\pi$ のピークは 1 次回折光とよばれ、分光に利用される。回折格子 G によって、ある一定の方向に回折された光は、凹面鏡 2 によってスリット S_2 を含む平面 AB 上の 1 点に位相差なく集光されるものとする。はじめに、波長 λ において 1 次の回折光が S_2 に集光されるように G の角度を固定 (α, β を固定することに対応) する。次に、入射する単色光の強度を一定に保ちながら λ をわずかに変化させ、 $\lambda + \Delta\lambda$ とする。このとき、 S_2 における光の強度を、 $\Delta\lambda$ の関数として、 $\Delta\lambda \geq 0$ の領域で図示し、最初に現れる極小点における $\Delta\lambda$ の値を、nm 単位で求めよ。ただし、波長 λ を 600 nm、回折格子の 1 mmあたりの溝の本数を 1000、回折格子の溝に垂直方向の幅を 60 mm とする。また、回折格子の全面が一様に回折に寄与しているとする。
5. 設問 4 で求めた最初の極小点における $\Delta\lambda$ の値は、分光器のスペクトル分解能のめやすを与える。しかし、実際の分光器のスペクトル分解能は、スリット (S_1, S_2) の幅にも依存する。その理由を簡潔に述べよ。
6. この実験で光検知器として用いている「光電子増倍管」の原理を、簡潔に説明せよ。また、この光電子増倍管は図 3 に示すような波長感度特性を持っているが、短波長と長波長で感度がゼロに近づいていくのはなぜか。その理由を簡潔に説明せよ。

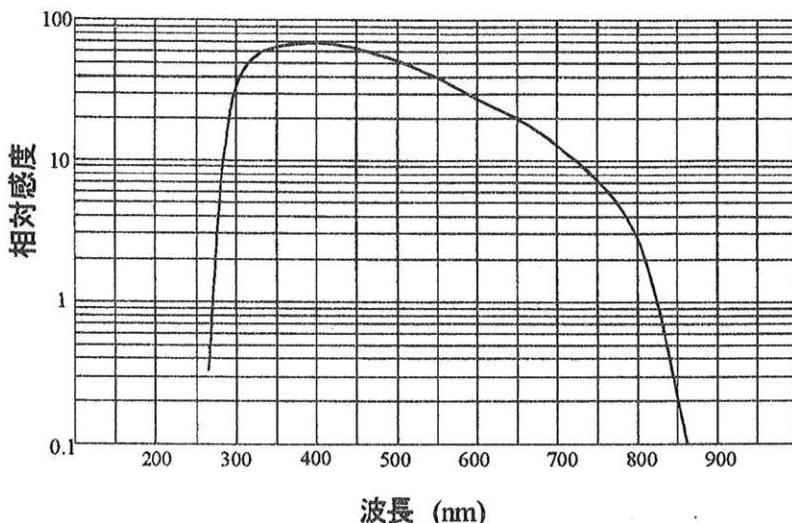


図 3:

第6問

実験においては、熱力学的な孤立系を取り扱うことは極めてまれである。例えば、温度を一定に保つために恒温槽を用いたり、圧力を一定に保つために大気圧下で実験を行う。このような系では、外界と系との間で熱の出入りや仕事のやりとりがあり、実験に都合のよい熱力学量を用いることが必要である。その一つがギブズ自由エネルギー (G) であり、

$$G = H - TS$$

で与えられる。ここで、 H 、 T 、 S は、それぞれ、エンタルピー、絶対温度、エントロピーである。以下の設問に答えよ。ただし、 $H = E + pV$ である (E 、 p 、 V は、それぞれ、系の内部エネルギー、圧力、体積である)。

1. 可逆過程において、外界より系に流入する微小な熱量 δQ とエントロピーの微小変化 dS との間に成り立つ関係式を示せ。
2. 可逆過程において、 G の全微分 dG が、

$$dG = Vdp - SdT$$

で与えられることを、熱力学の第1法則から出発して示せ。

3. 一般に、以下の関係が成立することを証明せよ。

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$$

$$H = -T^2 \left(\frac{\partial (G/T)}{\partial T} \right)_p$$

4. 次に、大気圧下で温度上昇によりもたらされる、鎖状分子の立体構造変化（熱転移）について考えてみよう。この鎖状分子（例えば、蛋白質などの生体高分子を考える）は N 個のユニットが直鎖状につながったものであり、低温では唯一の立体構造を取るが、温度を上昇させると、ある温度で協同的に熱転移してランダム構造に変わる。ランダム構造では、1 ユニットあたり n 通りの状態を自由に取ることができると仮定すると、一つの鎖状分子あたりの可能な状態数は n^N 通りあることになる。 $N = 100$ かつ $n = 10$ のとき、低温構造から高温ランダム構造への変化に伴って起こる、分子 1 モルあたりのエントロピー変化 ΔS_C を求めよ。必要であれば、 $\ln 10 = 2.3$ 、気体定数 $R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ を使ってよい。
5. 設問 4 における熱転移は一次相転移として扱うことができる。転移に伴うエントロピー変化が設問 4 の ΔS_C のみであると仮定すると、熱転移温度が 90°C のとき、熱転移に伴うエンタルピー変化はいくらか。