平成２０年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２０年２月５日（火）　９時３０分～１１時３０分

問題は１～３まで３問あります。
問題ごとに別の答案用紙を使用し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。

問題 1

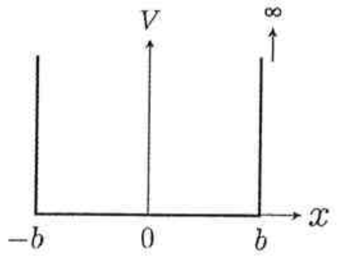
一次元ポテンシャル $V(x)$ 中を運動する質量 m の粒子について、以下の設問に答えよ。

(1) 粒子の波動関数 $\psi(x)$ に対する時間を含まないシュレーディンガー方程式を考える。$V(-x) = V(x)$ が成り立つとき、縮退していない場合には、$\psi(x)$ は一定のパリティを持つ。つまり、

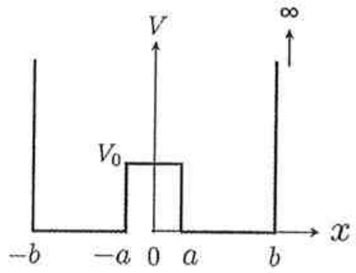
$$\begin{aligned} \psi(x) &= +\psi(-x) && \text{(偶パリティ)} \quad \text{または} \\ \psi(x) &= -\psi(-x) && \text{(奇パリティ)} \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 右図に示す無限に深い井戸型ポテンシャルに対して、 時間を含まないシュレーディンガー方程式の基底状態の解 ϕ_1 と第一励起状態の解 ϕ_2 を求めよ。それぞれのエネルギーも求めよ。また、これらの解の偶奇パリティについて述べよ。



(3) 右図に示すポテンシャルに対する基底状態の解 ψ_1 と第一励起状態の解 ψ_2 について、概形を図示し、関数形などその特徴について説明を加えよ。また、中心の山を摂動と見なして、それぞれのエネルギー E_1、E_2 を摂動の 1 次まで求めよ。ここで E_1、E_2 は V_0 より小さく、$2\pi a/b \ll 1$ とする。 これらの解の偶奇パリティについて述べよ。



(4) 上記の解 ψ_1、ψ_2 について、$\Psi_1(x,t) \equiv \psi_1 \exp(-iE_1t/\hbar)$ と $\Psi_2(x,t) \equiv \psi_2 \exp(-iE_2t/\hbar)$ は時間を含むシュレーディンガー方程式の特解となる。これらの解では、粒子が右側の井戸にいる確率と左側の井戸にいる確率は時間に依らず同じである。ここで $\Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 + \Psi_2)$ を考えると、これも時間を含むシュレーディンガー方程式の特解となるが、$t = 0$ においては一方の井戸にいる確率がより高くなっている。粒子が左右の井戸にいる確率が、時間と共にどのように変化するか述べよ。

問題 2

放物線ポテンシャル $V(x) = Ax^2$ ($A > 0$) に閉じ込められたスピン 1/2、質量 m をもつ 1 次元フェルミ粒子系を考える。力学的エネルギーは量子化され、角振動数 ω を用いて $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ($n = 0, 1, 2, 3, , ,$) と書ける。粒子間の相互作用はないものとする。以下の設問に答えよ。

(1) ω を A を用いて表せ。以下の問題では ω を用いて答えよ。

(2) まず、粒子が 1 個だけポテンシャルに閉じ込められ、絶対温度 T の熱浴と接している場合について考える。

(a) 1 次元運動の量子数が $n = i$ の状態にある確率を求めよ。$\beta \equiv 1/k_B T$ を用いて解答してもよい (k_B はボルツマン定数)。

(b) 平均エネルギー $< \varepsilon >$ を求めよ。必要ならば $|x| < 1$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

を用いてよい。

(3) 次に、粒子数 N が十分に大きく ($N \gg 1$)、かつ $k_B T$ が $\hbar w$ に比べて十分に大きい ($k_B T \gg \hbar w$) 場合について考える。エネルギー ε に対する粒子数の分布は、化学ポテンシャル μ を用いてフェルミ分布関数

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T] + 1}$$

により与えられるものとする。粒子数の揺らぎは、N に比べて十分に小さく無視できる。

(a) $k_B T$ が $N\hbar\omega$ に比べて十分に小さい場合には μ の温度変化は無視できる。このとき、μ を N を用いて表せ。

(b) $k_B T$ が $N\hbar\omega$ と同程度になると、$N =$ 一定の条件を課したとき、μ は温度に対して変化する。μ を T の関数として求めよ。

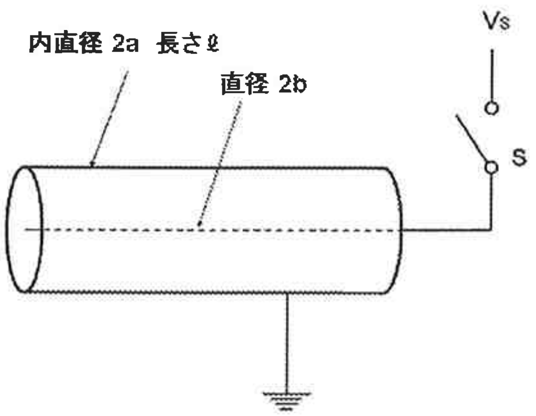
(c) 外部磁場をかけるとゼーマン分裂が起こり、スピンに関する縮重が解けてエネルギーは

$$\varepsilon = \varepsilon_n \pm \frac{E_Z}{2}$$

となる。ここで E_Z はゼーマンエネルギーであり外部磁場に比例する。磁化はスピン量子数が異なる粒子の数の差 ΔN に比例するが、ΔN を E_Z の 1 次の項まで求めよ。μ をそのまま用いて解答してよい。

問題 3

下図のように、内直径が $2a$、長さが ℓ $(a \ll \ell)$ の金属製円筒の中心に、直径が $2b$ の細い金属線を張った構造体を作り、その中に気体を封入する (円筒の両端は薄い絶縁体で覆い、ガスを封じてある)。円筒を接地し（電位 $= 0$）、スイッチ S を閉じて金属線に正の高電圧 V_S を印加した後、スイッチを開く。



(1) 円筒の中心軸からの距離が r （$b < r < a$）の点における、電場 $E(r)$ と電位 $\phi(r)$ を、V_S, a, b を用いて表せ。なお、封入気体の誘電率が必要な場合は、真空のそれと同じく ϵ_0 とせよ。円筒端部の電場の乱れは無視して良い。

(2) $a = 8$ mm, $b = 25$ μm, $\ell = 1000$ mm の場合について、円筒の持つ静電容量 C を求めよ。更に $V_S = 2000$ V とした場合、金属線に誘導される電荷量 Q と、金属線表面ごく近傍の気体中（$r = b$ とする）における電場の値 E_b を求めよ。単位を明記し、数値は有効数字 2 桁で求めよ。

ϵ_0 の値として、$10^{-9}/(36\pi)$ [$\mathrm{C^2\ s^2\ kg^{-1}\ m^{-3}}$]、また自然対数の値として、$\ln 2 = 0.693, \ln 3 = 1.099, \ln 5 = 1.609, \ln 7 = 1.946$ を使って良い。

(3) 気体原子の電離により、金属線の近傍に電荷 q の陽イオンと電荷 $-q$ の自由電子（$|q| \ll |Q|$）が生じたとする。電子は直ちに金属線に吸収されるので以下の議論では考慮しない。陽イオンは、電場に沿って円筒へと移動する。陽イオンが r から $r + dr$ まで移動する時、金属線の電圧変化 dV と移動量 dr の関係を、電圧 V, 電荷量 q, 電場 $E(r)$, 静電容量 C の式として表せ。陽イオンになされた仕事は、円筒と金属線の作るコンデンサーに蓄えられたエネルギーの変化に等しいとする。

(4) 気体中の陽イオンの移動速度 $v(r)$ と電場 $E(r)$ との間には、$v(r) = \mu \cdot E(r)$ なる比例関係が成り立つものとする。設問 (3) の dV を時刻 $t = 0$ から積分することによって、金属線の電位の時間変化 $V(t)$ を求めよ。陽イオンは、時刻 $t = 0$ に、位置 $r = b$ で生じたとし、$V(0) = V_S$ とせよ。