

平成18年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻 博士課程入学試験

物理学

平成18年2月7日（火） 9時～11時

問題1、2、3に解答せよ。
問題ごとに別の答案用紙を使用し、それぞれの答案用紙に氏名、
受験番号および問題番号を記入せよ。

問題 1

角運動量演算子 L_x, L_y, L_z に対し $J_x = L_x/\hbar, J_y = L_y/\hbar, J_z = L_z/\hbar$ と定義すると交換関係

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_y, J_z] = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y$$

を満たす。

(1) 角運動量の量子化に関する以下の問に答えよ。

(a) $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ とするとき

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_z$$

を満たすことを示せ。

(b) 角運動量のスピン j 表現の正規直交基底を $|j, m\rangle$ ($m = -j, -j+1, \dots, j$) とする。状態 $|j, j\rangle$ が $J_z|j, j\rangle = j|j, j\rangle, J_+|j, j\rangle = 0$ を満たすことを用いて

$$J^2|j, j\rangle = j(j+1)|j, j\rangle$$

を示せ。ここで角運動量の大きさの 2 乗は

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$$

と定義される。

(c) 関係式

$$|J_-|j, m\rangle|^2 = \langle j, m|J_+J_-|j, m\rangle = (j-m+1)(j+m)$$

$$|J_+|j, m\rangle|^2 = \langle j, m|J_-J_+|j, m\rangle = (j+m+1)(j-m)$$

を示せ。なおこの問題では $J^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle$ を用いて良い。

(2) 次にスピン 1 の表現とスピン 1/2 の表現の合成を考える。それぞれの表現の正規直交基底を $|1, m\rangle^{(1)}$ ($m = 1, 0, -1$), $|\frac{1}{2}, m\rangle^{(2)}$ ($m = \pm\frac{1}{2}$) とし、対応する角運動量演算子を $J_i^{(a)}$ ($a = 1, 2, i = x, y, z$) とする。また全角運動量を $J_i^{(t)} = J_i^{(1)} + J_i^{(2)}$ ($i = x, y, z$) とし、 $J_i^{(t)}$ に対する既約表現の正規直交基底を $|j, m\rangle^{(t)}$ とする。このとき以下の問に答えよ。

(a) スピン $\frac{3}{2}$ の状態 $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle^{(t)}$ を、条件

$$J_+^{(t)} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle^{(t)} = 0, \quad J_z^{(t)} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle^{(t)} = \frac{3}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle^{(t)}$$

を解くことにより $|1, m\rangle^{(1)}, |\frac{1}{2}, m\rangle^{(2)}$ を用いて表せ。

(b) 同様に状態 $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle^{(t)}$ を関係式

$$J_-^{(t)} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle^{(t)} \propto \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle^{(t)}$$

に注意して $|1, m\rangle^{(1)}, |\frac{1}{2}, m\rangle^{(2)}$ を用いて表せ。なお比例係数については小問 (1) の (c) で導いた式を用いてよい。

問題 2

質量 m 、スピン $1/2$ 、磁気モーメントの大きさ $\mu (> 0)$ をもつフェルミ粒子系に関して以下の小問 (1)~(7) に答えよ。ただし、プランク定数を $h (= 2\pi\hbar)$ とする。

まず、この粒子 1 個を 1 辺の長さ L の 1 次元の線分 (x 軸に平行とする) 上に閉じ込める場合を考える。粒子はこの 1 次元空間内で自由に運動できるものとする。

- (1) 粒子の波動関数 ψ が従うシュレディンガー方程式を書け。ただし、粒子のエネルギーを E とする。
- (2) 固有状態を表す量子数を $n (= 1, 2, \dots)$ として固有関数 ψ_n と固有エネルギー E_n をそれぞれ求めよ。ただし、固有関数は規格化する必要はなく、空間の端では $|\psi_n|^2 = 0$ なる境界条件が成り立つとする。

これから分かるように、1 次元系の固有状態は波数 ($k_x > 0$) 空間で等間隔 ($\Delta k_x = \pi/L$) に並ぶ。次に、多数の粒子を 1 辺の長さ L の平面 (面積 = L^2) に閉じ込める場合を考える。この場合、 x 方向と y 方向の運動はそれぞれ独立に考えることができる。粒子をこの 2 次元空間に 1 個ずつ加えてゆくと、パウリの排他律を満たすようにエネルギーの低い固有状態から順に占有される。いま N 個 ($N \gg 1$) の粒子を閉じ込めた場合を考える。ただし、ここでは温度 $T = 0$ の場合を考え、粒子間の相互作用は無視できるとする。

- (3) 占有された一番高い固有エネルギーをフェルミエネルギー E_F とよび、その状態の波数 k をフェルミ波数 k_F とよぶ (ただし $k^2 = k_x^2 + k_y^2$)。 E_F を k_F で表し、波数 (k_x, k_y) 空間で粒子が占める領域を図示せよ。
- (4) スピンの自由度に注意して波数空間での 1 粒子状態の面密度を考えることで、 N を m, L, E_F を用いて表せ。
- (5) 一般にエネルギーが E と $E + \delta E$ の間にある 1 粒子状態の数は $D(E)\delta E$ で表され、 $D(E)$ を系の状態密度とよぶ。 D を m と L を用いて表せ。

このように 2 次元系では状態密度がエネルギーに依らず一定となる特長をもつ。そのため、次のように磁化もその大きさが全粒子数に依らないという特徴的な振る舞いを示す。

- (6) 2 次元フェルミ粒子系に弱い外部磁場 $H (\ll E_F/\mu)$ を加えると、固有状態は磁気モーメントの向きが磁場と平行か反平行の 2 成分にゼーマン分裂する。平行および反平行の成分の状態密度 (D_+ と D_- とする) を横軸、エネルギーを縦軸にした図をそれぞれ描き、粒子が占める領域を示せ。
- (7) このとき系がもつ磁化 M は平行スピンの粒子数と反平行スピンの粒子数の差に比例する。 M を D, μ, H を用いて表せ。

問題 3

計測器などに用いられる同軸ケーブルは、図 1 のような半径 a の芯線と半径 b の外側導体で構成される。二つの導体の間は誘電率 ϵ 、透磁率 μ の絶縁体で満たされているとし、導体の抵抗は無視できるとして、この同軸ケーブルの特性に関する以下の問いに答えよ。なお必要に応じて、絶縁体中の電場 \vec{E} および磁場 \vec{H} に対するマクスウェル方程式

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \cdots (A) \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \cdots (B) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdots (C) \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdots (D)$$

および円筒座標における以下の公式

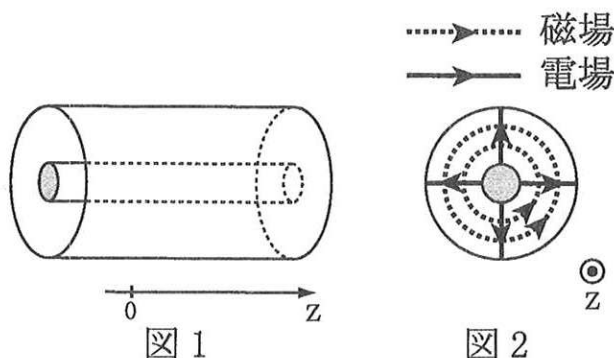
$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z \text{ のとき} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

を用いてよい。ただし \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_z はそれぞれ r , θ , z が増加する方向の単位ベクトル、 $A_r(r, \theta, z)$, $A_\theta(r, \theta, z)$, $A_z(r, \theta, z)$ はそれぞれ \vec{A} の対応する単位ベクトル方向の成分である。

- (1) 同軸ケーブルの信号の伝搬は、同軸線内における平面電磁波によって行われる。図 2 はこの電磁波で生じる電場と磁場の様子を書いたものである (以下ではこの図にかかれている電場・磁場の向きを前提として答えてよい)。同軸ケーブルに沿った方向を z 軸とし、同軸ケーブルの中心を原点とする円筒座標 (r, θ, z) をとったとき、軸周りの回転対称性も考慮して、この平面電磁場は

$$\vec{E} = E_r(r) e^{ikz - i\omega t} \vec{e}_r, \quad \vec{H} = H_\theta(r) e^{ikz - i\omega t} \vec{e}_\theta,$$

と書き表される ($k > 0$, $\omega > 0$)。ただし $E_r(r)$, $H_\theta(r)$ は r のみの関数であり、 $E_r(r = a) = E_0$ とする。マクスウェル方程式の式 (A) を用いて、電場の振幅 $E_r(r)$ を r の関数として求めよ。



(2) マックスウェル方程式より、以下の式が導かれることを示せ。

$$ikE_r(r) = i\omega\mu H_\theta(r), \quad -ikH_\theta(r) = -i\omega\varepsilon E_r(r)$$

- (3) 電磁波の伝搬速度 $c = \omega/k$ を求めよ。また磁場の振幅 $H_\theta(r)$ を r の関数として求めよ。
- (4) 時刻 t , 位置 z における芯線と外側導体の間の電位差 V を求めよ (外側導体を電位の基準点とせよ)。
- (5) 時刻 t , 位置 z において、芯線に流れる電流 I を求めよ (z 軸正の向きを電流の正の向きとせよ)。
- (6) 同軸ケーブルのインピーダンス $Z = V/I$ を求めよ。
- (7) ここまでは z 軸正の方向に伝搬する信号 (電磁場) について考察してきた。 z 軸負の向きに伝搬する信号に関しては、 $Z = -V/I$ が成り立つことを示せ。ここで V, I の正の向きは (4), (5) と同じとし、 Z は (6) の答えと同じものをとるとする。
- (8) 図3のようにインピーダンスがそれぞれ Z_1, Z_2 の同軸ケーブルをつなぎ、左から信号 (電磁波) を入射させると反射波と透過波が生じる。入射波、反射波、透過波によって接続部に生じる電流 (電圧) をそれぞれ $I_i, I_r, I_t (V_i, V_r, V_t)$ とする。ただし各電流・電圧の正の向きは (4), (5) と同じとする。接続部でキルヒホッフの法則を使って、反射係数 $\Gamma = V_r/V_i$ を Z_1, Z_2 を用いて表せ。また反射係数が0となるために必要な Z_1, Z_2 の条件式を求めよ。

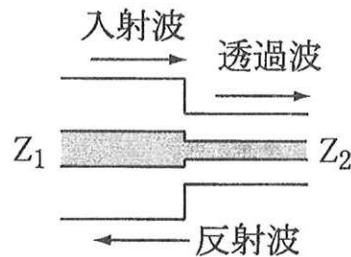


図3