平成２２年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２２年２月３日（水）　９時３０分～１１時３０分

問題は全部で３問あります。
問題ごとに別の答案用紙を使用し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。

第1問

固有角振動数 ω の一次元調和振動子で記述される質量 m、電荷 q の粒子に対して、さらに電場 $\mathcal{E}(t)$ によるポテンシャル $-q\mathcal{E}(t)\hat{x}$ が付加されている場合を考える。ただし、粒子の位置演算子を $\hat{x}$、 運動量演算子を $\hat{p}$ で表し、プランク定数を $\hbar$ とする。他の粒子との相互作用および粒子のスピン自由度は無視できるものとして、以下の小問に答えよ。

1. 一次元調和振動子のハミルトニアン:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

に対する消滅演算子 $\hat{a}$ は、

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \tag{2}$$

で与えられる。このとき、$\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{\mathcal{H}}_0$ を、$\hat{a}$ と生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。

2. この電場中の粒子のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}_0 - q\mathcal{E}(t)\hat{x}$ に対して、交換関係 $[\hat{a}, \hat{\mathcal{H}}(t)]$ と $[\hat{a}^\dagger, \hat{\mathcal{H}}(t)]$ を求めよ。

3. シュレーディンガー方程式:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t)|\phi(t)\rangle \tag{3}$$

にしたがう時刻 t における状態 $|\phi(t)\rangle$ に対して、小問1で与えられた消滅演算子 $\hat{a}$ の期待値を

$$\alpha(t) = \langle\phi(t)|\hat{a}|\phi(t)\rangle \tag{4}$$

で定義する。このとき、$\alpha(t)$ が

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) + i\lambda_0\mathcal{E}(t) \tag{5}$$

を満たすことを示せ。ただし $\lambda_0 \equiv q/\sqrt{2m\hbar\omega}$ とする。

4. $t=0$ の初期状態 $|\phi(0)\rangle$ が、消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態 $|\alpha_0\rangle$ で、固有値 α_0 を持つものとする。電場が、時刻 $0 \le t \le T$ では $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0$、 時刻 $t > T$ では $\mathcal{E}(t) = 0$、で与えられる場合に (5) 式を解いて、時刻 t における期待値 $\alpha(t)$ を求めよ。ここで、T と $\mathcal{E}_0$ は正の定数である。

5. $|\psi(t)\rangle \equiv [\hat{a} - \alpha(t)]\,|\phi(t)\rangle$ と定義したとき、$|\psi(t)\rangle$ が

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \left[\hat{\mathcal{H}}(t) + \hbar\omega\right]|\psi(t)\rangle \tag{6}$$

を満たすことを示せ。

第2問

固有角振動数 ω の独立な N 個の1次元調和振動子からなる系が、温度 T の熱浴と接して熱平衡状態にある場合に、以下の小問に答えよ。ただし、プランク定数を $\hbar$ ($\approx 1.05 \times 10^{-34}$ J s)、ボルツマン定数を k_B ($\approx 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1})、アボガドロ数を N_A ($\approx 6.02 \times 10^{23}$ mol^{-1})、光速を c ($\approx 3.00 \times 10^8$ m s^{-1}) とする。また必要であれば $\beta \equiv 1/(k_B T)$ を用いてよい。

1. この系の分配関数 Z を求めよ。

2. この系の内部エネルギーを U としたとき、その期待値 $\overline{U}$ を求めよ。

3. この系の内部エネルギーのゆらぎ $\overline{(U-\overline{U})^2}$ を求めよ。

4. この系の熱容量 C を求めよ。

5. 小問4で求めたこの系の熱容量 C に対して、高温 $T \gg \hbar\omega/k_B$ での近似式 C_H を求めよ。調和振動子以外の物理モデルで、高温での熱容量が C_H と同様の温度依存性を示すような系の例を挙げ簡単に説明せよ。

6. 小問4で求めたこの系の熱容量 C に対して、低温 $T \ll \hbar\omega/k_B$ での近似式 C_L を求めよ。調和振動子以外の物理モデルで、低温での熱容量が C_L と同様の温度依存性を示すような系の例を挙げ簡単に説明せよ。

7. 一酸化炭素CO分子におけるCとOの間の伸縮振動の固有角振動数 ω_{CO} は、波長の逆数が2143 cm^{-1} である赤外光の角振動数に等しい。この固有角振動数 ω_{CO} に対応する特性温度 $\Theta_{\mathrm{CO}} \equiv \hbar\omega_{\mathrm{CO}}/k_B$ を有効数字1桁で求めよ。また、特性温度 Θ_{CO} よりも十分低温および高温の領域で、CO気体の定積モル比熱 c_v がどのような値をとるか説明せよ。ただし、CO気体は理想気体と見なせるほど希薄であり、CとOの解離や組み換えを起こす化学反応などは起こらないものとする。また、CO分子の運動のうち、伸縮振動は調和振動と見なすことができ、並進運動と回転運動は古典的であるとしてよい。

第3問

真空中およびプラズマ中の電磁波の伝搬について考える。マクスウェル方程式:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, && (1)\\ \mathrm{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{i} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, && (2)\\ \mathrm{div}\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, && (3)\\ \mathrm{div}\vec{B} &= 0 && (4) \end{aligned}$$

を用いて、以下の小問に答えよ。ここで、$\vec{E}$ は電場ベクトル、$\vec{B}$ は磁束密度ベクトル、$\vec{i}$ は電流密度、ρ は電荷密度、ϵ_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率である。

まず真空中 ($\vec{i} = \vec{0}$, ρ=0) の場合を考える。

1. マクスウェル方程式から、$\vec{E}$ と $\vec{B}$ が満たす波動方程式をそれぞれ求めよ。なお、任意のベクトル量 $\vec{A}$ に対して成り立つ関係式 $\mathrm{rot\ rot}\ \vec{A} = \mathrm{grad\ div}\ \vec{A} - \triangle\vec{A}$ を用いてよい。

2. 電場と磁場が、波数ベクトル $\vec{k}$ と角振動数 ω を用いて、以下の形で書けるものとする。ただし、$\vec{E}_0$ と $\vec{B}_0$ は、それぞれ電場と磁場の向きに対応した定ベクトルである。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t), \tag{5}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t). \tag{6}$$

   小問1で求めた波動方程式を用いて、$|\vec{k}|$ と ω の間の関係 (分散関係) を求めよ。この関係から、真空中の電磁波の位相速度である光速 $c \equiv \omega/|\vec{k}|$ を ϵ_0 と μ_0 を用いて表せ。

次に、電子数密度 n_e の一様なプラズマを考える。以下の議論では、電子のみが動き、イオンは電子に比べて十分に重いため動かないものとする。また、電子の熱運動および電子が磁場と相互作用するローレンツ力は無視する。

3. プラズマ内を電磁波が伝搬する場合は、真空中とは異なり、電磁波の電場 $\vec{E}$ が電子に力をおよぼす。そのために電子が運動する結果として電流が生じる。この電流を考慮して、プラズマ内での電磁波の分散関係を、プラズマ角振動数 $\omega_{\mathrm{p}} \equiv \sqrt{e^2 n_e/(\epsilon_0 m_e)}$ を用いて表せ。ただし、e は素電荷、m_e は電子の質量である。

4. 地球は電離層と呼ばれるプラズマ層に取り囲まれている。このプラズマ内での電子の典型的な数密度 n_e を $1\times10^{12}\ \mathrm{m}^{-3}$ として、電離層でのプラズマ角振動数 ω_{p} を有効数字1桁で求めよ。なお、$e \approx 2\times10^{-19}$ C、$m_e \approx 9\times10^{-31}$ kg、$\epsilon_0 \approx 9\times10^{-12}\ \mathrm{F\ m}^{-1}$ と近似して良い。この値と小問3の分散関係から、なぜ短波ラジオ ($\omega \sim 2\times10^7\ \mathrm{s}^{-1}$) では遠くの国の放送を聴くことができるのに、TV ($\omega \sim 1\times10^9\ \mathrm{s}^{-1}$) では遠くの国からの放送を見ることができないのかを論ぜよ。