平成２３年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２３年２月２日（水）　９時３０分〜１１時３０分

問題は全部で７問あります。
第１−２問、第３−５問、第６−７問をそれぞれ別の答案用紙（計３枚）に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。

第1問

電場、磁場中での荷電粒子の非相対論的運動を考える。粒子の質量を m、電荷を q として以下の問に答えよ。粒子の位置を $\boldsymbol{r}$、電場を $\boldsymbol{E}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$ とする。

(1-1) 電場と磁場が存在するときの粒子の運動方程式を記せ。

(1-2) 電場がなく、磁束密度は z 軸方向に平行で一様であるとする $(B_x = B_y = 0, B_z = b)$。初期時刻 $(t = 0)$ に原点にあり、x 方向に初速度 $(v_x = v_0, v_y = v_z = 0)$ を持っている粒子の運動を求めよ。

(1-3) 上で考えた磁場に加えて、z 軸方向に平行で一様な電場 $(E_x = E_y = 0, E_z = a)$ がある場合を考える。このとき、初期時刻 $(t = 0)$ に原点にあり、x 方向に初速度 $(v_x = v_0, v_y = v_z = 0)$ を持っている粒子の運動を求めよ。

第2問

回転対称な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を考える。ここでは円筒座標 (ρ, ϕ, z) を用いる。B_ϕ、B_z が次のように変化するとき、

$$B_\phi = 0, \quad B_z = cz + d \quad (c, d : \text{一定}) \tag{1}$$

B_ρ はどのように変化するかを求めよ。

第3問

以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を $h = 6.6 \times 10^{-34}$Js、電子の電荷を $e = -1.6 \times 10^{-19}$C、真空中の光速を $c = 3.0 \times 10^{8}$m/s として計算せよ。

(3-1) 真空中の波長が 100nm の光子のエネルギーは何ジュールか。またそれは何電子ボルトか。

第4問

以下の問に答えよ。

(4-1) スピン演算子 S_x, S_y, S_z の間の交換関係を記せ。

(4-2) スピン 1/2 の粒子のスピン演算子の x および z 成分、S_x, S_z は、パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

を用いて $S_x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_x$ および $S_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$ と書ける。このとき、S_y の行列表示を求めよ。

(4-3) 二つのスピン 1/2 の粒子のスピン演算子をそれぞれ $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$ とする。合成スピンを $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ とするとき、$\boldsymbol{S}^2$ と S_z の同時固有関数をすべて求めよ。また、それらは $\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2$ の固有関数にもなっていることを示せ。

第5問

x 軸上をポテンシャル $V(x)$ のもとで運動する質量 m の粒子の量子力学的運動を考える。その波動関数を $\psi(x,t)$ とする。ただし、相対論的な効果は考えなくてよい。また、$V(x)$ は実関数とする。以下の問に答えよ。

(5-1) $\rho(x,t)$ を確率密度 $|\psi(x,t)|^2$ とする。時間依存シュレディンガー方程式を用いて連続の式

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

を導き、$j(x,t)$ の表式を書き下せ。

(5-2) これより

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho(x,t) dx = j(a,t) - j(b,t) \tag{4}$$

を得る。このことから $j(x,t)$ にどのような物理的意味を与えたらよいか。理由とともに示せ。

第6問

質量 m の単原子 N 個からなる古典単原子理想気体が、温度 T の平衡状態にある。ボルツマン定数を k_B として、以下の問に答えよ。ただし、N は巨視的な数とする。

(6-1) ヘルムホルツの自由エネルギー F を、温度 T、体積 V、原子数 N の関数として求めよ。ただし、温度 T_0、体積 V_0、原子数 N_0 の場合のヘルムホルツの自由エネルギーを F_0 とする。

必要なら、次の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0) \tag{5}$$

(6-2) エントロピー S を、温度 T、体積 V、原子数 N の関数として求めよ。

(6-3) 熱力学第3法則（V/N を固定して $T \to +0$ とすると $S/N \to 0$ となる、というネルンスト-プランクの仮説）が成り立たないことを示せ。また、実在の気体を冷やしていくと熱力学第3法則が成り立つ理由を簡単に説明せよ。

第7問

相互作用のない同種粒子よりなる量子系を考える。ν 番目の1粒子状態（エネルギーを ε_ν とする）を占有する粒子数を n_ν とする。系の多粒子状態は、n_ν の組

$$(n_0, n_1, n_2, \cdots) \equiv \{n_\nu\} \tag{6}$$

で指定される。その状態のエネルギー、粒子数は、それぞれ

$$E_{\{n_\nu\}} = \sum_\nu \varepsilon_\nu n_\nu, \quad N_{\{n_\nu\}} = \sum_\nu n_\nu \tag{7}$$

で与えられる。この粒子がフェルミ粒子であるとして、以下の問に答えよ。

(7-1) この系が、温度 T、化学ポテンシャル μ の平衡状態にある。この系の大分配関数

$$\Xi = \sum_{\{n_\nu\}} e^{-\beta(E_{\{n_\nu\}} - \mu N_{\{n_\nu\}})} \tag{8}$$

を次の形に求めたとする。

$$\Xi = \prod_\nu \xi_\nu \tag{9}$$

このとき、ξ_ν を求めよ。ただし、$\beta = 1/k_B T$（k_B はボルツマン定数）である。

(7-2) n_ν の期待値 $\langle n_\nu \rangle$ を求めよ。

(7-3) 熱力学的な性質が粒子の統計性に依らなくなる条件を記せ。