

受験番号	
氏名	

平成31年度東京大学大学院理学系研究科  
物理学専攻修士課程入学試験問題

# 物 理 学

平成30年8月20日（月） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。





第1問

ハミルトニアン

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

を持つ1次元調和振動子の量子力学系を考える。ここで  $m$  と  $\omega$  は振動子の質量と固有振動数、 $x$  と  $p$  は座標と運動量の演算子である。プランク定数を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$  とするとき、 $x$  と  $p$  は交換関係  $[x, p] = i\hbar$  を満たす。このような1次元束縛ポテンシャルを持つ系のハミルトニアンが対角化可能で縮退を持たないことを既知として、以下の設問に答えよ。

1. 演算子  $a, a^\dagger, N$  を次のように定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{ip}{m\omega} \right), \quad N = a^\dagger a.$$

これらの交換子  $[a, a^\dagger], [N, a], [N, a^\dagger]$  を計算せよ。また、 $H_0$  と  $N$  の間には  $H_0 = \hbar\omega(\alpha N + \beta)$  という関係が成り立つ。 $\alpha$  と  $\beta$  の値を書け。

2. 上記の演算子  $N = a^\dagger a$  の固有値が (i) 非負であること、(ii) 整数であることを示せ。
3. エネルギー準位の番号をエネルギーの低い方から順に  $n = 0, 1, 2, \dots$  とする。 $n = 0$  は基底状態に対応する。 $n$  番目の準位のエネルギーを求めよ。また、 $n$  番目の準位に対応する規格化された固有状態を  $|n\rangle$  とするとき、 $n \geq 1$  に対する  $|n\rangle$  を  $a^\dagger$  と  $|0\rangle$  を用いて表せ。

以下では  $H_0$  にポテンシャル  $V = \lambda x^4$  ( $\lambda$  は正の定数) を加えたハミルトニアン

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x^4$$

を持つ系を考える。

4.  $V$  を摂動と考え、エネルギー固有値の摂動展開を求めたい。

(i) 準備として一般の  $V$  に適用できる表式を得ておこう。 $n$  番目の準位のエネルギーの摂動展開を  $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots$  とする。1次と2次の摂動  $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}$  を、 $H_0$  の固有値  $E_k^{(0)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) および  $H_0$  の規格化された固有状態からなる基底  $|k\rangle$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) に関する  $V$  の行列要素  $V_{kl}$  ( $k, l = 0, 1, 2, \dots$ ) を用いて表せ。ただし行列要素は  $V|l\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle V_{kl}$  によって定義される。

(ii)  $V = \lambda x^4$  の場合に行列要素  $V_{k0}$  を計算し、基底状態のエネルギーを  $\lambda$  に関する摂動展開の2次まで求めよ。

5. 次に、 $V$  が摂動とはみなすことができない場合を考えよう。高いエネルギーを持つ固有状態は準古典的に扱うことができる。準位番号  $n$  が十分大きい極限において、エネルギー固有値  $E_n$  が  $n$  の何乗に比例するか答えよ。



第2問

スピンを持つ原子が図1のように1次元的に並んで相互作用している古典的な系を考える。これらの原子に、左端から順に  $i = 1, 2, \dots, L$  と番号を付け、 $i$  番目の原子のスピンの状態を表す変数を  $S_i$  とする。ただし、 $L \geq 2$  とし、 $S_i$  は、 $\hat{x} = (1, 0, 0)$  か  $\hat{y} = (0, 1, 0)$  のいずれかをとるものとする(図1)。この系の各状態は、スピン配置  $(S_1, \dots, S_L)$  で指定され、そのエネルギーは、

$$E(S_1, \dots, S_L) = -J \sum_{i=1}^{L-1} S_i \cdot S_{i+1} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $J > 0$  である。この系が、温度  $T$  の熱平衡状態にあるとする。ここで、ボルツマン定数  $k_B$  を用いて逆温度を  $\beta = 1/(k_B T)$  と定義し、系の分配関数を  $Z_L(\beta)$  とする。以下の設問に答えよ。

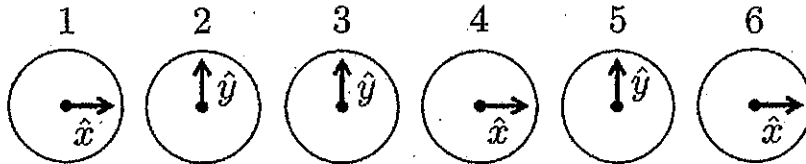


図1:  $L = 6$  の場合のスピン配置の例。

1.  $L = 2$  の場合に、可能なスピン配置をすべて列挙し、それぞれのエネルギーを求めよ。また、その結果をもとに、分配関数  $Z_2(\beta)$  を求めよ。
2.  $L = 3$  の場合に、可能なスピン配置をすべて列挙し、それぞれのエネルギーを求めよ。また、その結果をもとに、分配関数  $Z_3(\beta)$  を求めよ。
3. 一般の  $L$  について、 $Z_L(\beta)$  を求めよ。ただし、 $L \geq 3$  のとき、 $Z_L(\beta)$  は  $Z_{L-1}(\beta)$  を用いて表すことができる。その関係式を用いてよい。
4. 一般の  $L$  について、系の自由エネルギー  $F_L(\beta)$  を求めよ。
5.  $L$  が十分大きい極限での、スピン1個あたりの内部エネルギー  $u(\beta)$  を求めよ。また、高温極限および低温極限での  $u(\beta)$  の値とスピン配置の出現確率との関係について説明せよ。

次に、原子数  $L$  の系の左端のスピン  $S_1$  と右端のスピン  $S_L$  の内積の期待値  $\langle S_1 \cdot S_L \rangle$  について考える。

6. 原子数  $L$  の系において、 $S_1 = \hat{a}$  かつ  $S_L = \hat{b}$  ( $\hat{a}, \hat{b}$  は、 $\hat{x}, \hat{y}$  のいずれか) である確率を  $P_L(\hat{a}, \hat{b})$  とする。 $L \geq 3$  のとき、 $P_L(\hat{a}, \hat{b})$  と  $P_{L-1}(\hat{a}, \hat{b})$  の間には、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} P_L(\hat{x}, \hat{x}) & P_L(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_L(\hat{y}, \hat{x}) & P_L(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{L-1}(\hat{x}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_{L-1}(\hat{y}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(\hat{x}, \hat{x}) & Q(\hat{x}, \hat{y}) \\ Q(\hat{y}, \hat{x}) & Q(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

このとき、4つの行列要素  $Q(\hat{a}, \hat{b})$  を  $\beta, J$  を用いて表せ。

7.  $\langle S_1 \cdot S_L \rangle$  を,  $\beta, J, L$  を用いて表せ。また,  $\langle S_1 \cdot S_L \rangle$  は,  $L$  に依存しない定数  $A, B, \xi$  を用いて

$$\langle S_1 \cdot S_L \rangle = A + B \exp\left(-\frac{L-1}{\xi}\right) \quad (3)$$

と書ける。高温極限および低温極限における  $\xi$  を, それぞれ  $\beta, J$  を用いて表せ。

### 第3問

質量  $m_1, m_2$  をもつ二つの質点が互いの重力によって束縛運動している系を考える。それらの位置ベクトルをそれぞれ  $r_1, r_2$  とし、相対位置ベクトルを  $r \equiv r_2 - r_1$  と定義する。軌道面上での  $r$  の2次元極座標表示  $(r, \varphi)$  を用いると、系のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{G\mu M}{r} \quad (1)$$

となる。ここで、 $G$  はニュートンの重力定数である。また、 $M$  と  $\mu$  は以下で定義される。

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

この系に関する以下の設問に答えよ。なお、設問5と6は、それ以外の設問と独立に解くことができる。

1. 式(1)のラグランジアンを用いて、 $r$  と  $\varphi$  に対する運動方程式を求めよ。
2. この系のエネルギー  $E$  の表式、および  $\varphi$  に共役な運動量  $J$  の表式を求めよ。
3.  $E$  と  $J$  が運動の定数であることを示せ。

一般相対論によれば、この系から重力波が放射されることで、 $E$  は保存せず徐々に減少する。以下では、重力波の放射の影響を考慮した場合の系の運動を、一般相対論ではなくニュートン力学を用いて近似的に取り扱う。さらに、任意の時刻  $t$  における軌道が半径  $a = a(t)$  の円軌道で近似できる場合を考え、その時刻でのエネルギー  $E = E(t)$  が

$$E = -\frac{G\mu M}{2a} \quad (3)$$

と書けることを用いてよい。また重力波の放射に伴う  $\mu$  と  $M$  の変化は無視できるものとする。

4. 半径  $a$  の円軌道の場合、この系からの重力波による単位時間あたりのエネルギー放射率は、 $c$  を光速として、

$$L_{\text{GW}} = \frac{32G^4}{5c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} \quad (4)$$

で与えられる。したがって、系の運動をニュートン力学で近似した場合には

$$\frac{dE}{dt} = -L_{\text{GW}} \quad (5)$$

が成り立つ。式(5)を  $a$  に対する微分方程式に書き直せ。

5. ケプラーの法則を用いれば、設問4の結果は公転周期  $P$  に対する次の微分方程式

$$\frac{dP}{dt} = -A \left(\frac{P_c}{P}\right)^{5/3} \quad (6)$$

に書き換えられる。ここで、 $A$  は無次元の数係数、 $P_c$  は時間の次元をもつ定数で、それらは設問6で具体的に計算する。ここでは、式(6)を解いて、初期条件として公転周期  $P_0$  をもつ2質点系が、合体する(すなわち  $P=0$ )までの時間  $\tau_{\text{GW}}$  を、 $A, P_c$  および  $P_0$  を用いて表せ。



6. ケプラーの方程式

$$GMP^2 = 4\pi^2 a^3 \quad (7)$$

を用いて式(6)を導き、 $P_c = G\mu^\alpha M^\beta c^\gamma$ とした時のべき指数 $\alpha, \beta, \gamma$ の値と $A$ の表式を求めよ。

7. 2015年に、連星ブラックホールGW150914からの重力波信号が直接検出された。地上で重力波の信号が検出され始めた時点での連星ブラックホールの公転周期は $P_0 \approx 0.06$  secであった。この連星ブラックホールは、それから $\tau_{\text{GW}} \approx 0.15$  sec後に、重力波放射によって合体した。簡単のために、この連星は等質量 $m$ の2つのブラックホールからなり、また合体直前までニュートン力学近似が正しいものと仮定する。設問5と6の結果を利用することで、 $m$ が太陽質量 $M_\odot$ の何倍であるかを概算せよ。 $A$ の近似値を2500とし、必要であれば $2GM_\odot/c^3 \approx 10^{-5}$  sec,  $6^{3/5} \approx 2.9$ ,  $2^{1/5} \approx 1.1$ を用いてよい。
8. 連星ブラックホールの公転周期が $P_0$ のときの公転半径を $a_0$ とする。それ以降、重力波放射に伴い $a$ は徐々に減少するが、やがてある長さ $a_{\text{min}}$ 以下になると、上述のニュートン力学的な2質点の運動という描像が破綻する。これは物理的には、ブラックホールはその質量に対応した特徴的な長さスケールをもち、 $a = 0$ になる以前に2つのブラックホールが実効的に合体するためである。GW150914の場合、合体までに放射される重力波によって、設問7で得られた質量 $m$ の約一割に相当するエネルギーが系から失われたと考えられている。このとき、 $a_{\text{min}}$ と $m$ の関係式を導け。ただし簡単のために、 $a_0 \gg a_{\text{min}}$ と近似できるものとし、 $a$ が $a_0$ から $a_{\text{min}}$ になるまでは上述のニュートン力学近似が正しく、かつ $a$ が $a_{\text{min}}$ になった後は重力波が放射されないものと仮定せよ。この設問においても、式(3)における $\mu$ と $M$ の時間変化率は、 $a$ の時間変化率に比べて小さく無視できるものとする。

第4問

マイケルソン型干渉計を用いて、スペクトル分光測定を行うことを考える。図1に示すように、光源からの入射光はビームスプリッタ (BS) に当たり、鏡A へ向かう反射光と鏡B へ向かう透過光に分割される。この二つの光の進行方向は互いに直交するものとする。それぞれの鏡で反射された光はBSに戻って合流し、一部は光源へ戻り、一部は検出器へ向かう。光が合流する時に干渉を起こし、その干渉した光が検出器により測定される。以下、光の電場ベクトルは紙面に垂直とする。 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$  はプランク定数、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  は光速、 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  はボルツマン定数である。設問7でのみ数値を代入すること。

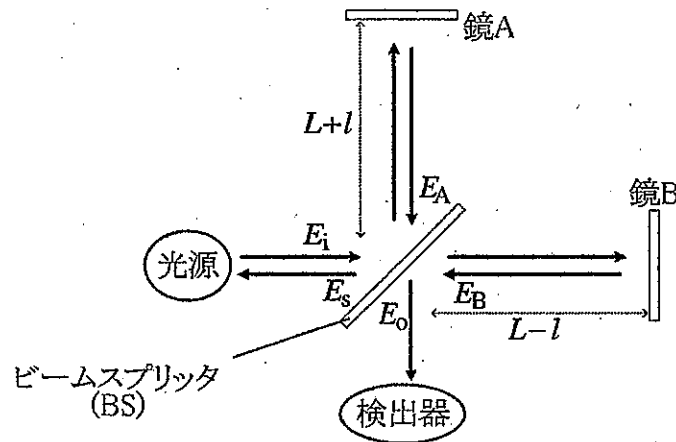


図1: マイケルソン型干渉計の模式図。

まず、周波数  $\nu$  の単色光の入射を考える。時刻  $t$  における光の複素電場は一般に  $Ee^{-i2\pi\nu t}$  と書くことができ、この  $E$  の部分を電場の複素振幅と呼ぶ。BS への入射直前における入射光の複素振幅を  $E_i$  とおく。BS と鏡A の間を光が往復するのにかかる時間を  $\Delta t_A$ 、BS と鏡B の間を光が往復するのにかかる時間を  $\Delta t_B$  とする。鏡A とB からそれぞれ反射されて戻ってきた光の、BS への入射直前の複素振幅を  $E_A$  と  $E_B$  とする。複素振幅の絶対値に対して定義されたBSの透過係数を  $p$ 、反射係数を  $r$  とする。光がBSを透過する前後の位相差を  $\phi_p$  とし、簡単のため、BS、鏡Aおよび鏡Bでの反射による位相差は全て  $\phi_r$  とする。鏡Aと鏡Bの反射率は100%とする。BSの厚みは考えなくてよい。

1.  $E_B$  は  $pE_i e^{i(\phi_p + \phi_r + 2\pi\nu\Delta t_B)}$  と書ける。同様に、 $E_A$  を、 $E_i$ 、 $\Delta t_A$ 、 $r$ 、 $\nu$  および  $\phi_r$  を用いて表せ。

鏡A から戻りBSを透過した光と、鏡B から戻りBSで反射された光が重なり合い、検出器へ向かう。この重なり合った光のBS直後での複素振幅を  $E_0$  とおく。同様に、光源へ戻っていく光のBS直後での複素振幅を  $E_s$  とおく。(図1)。

2.  $E_0$  および  $E_s$  を、 $E_i$ 、 $p$ 、 $r$ 、 $\phi_p$ 、 $\phi_r$ 、 $\Delta t_A$ 、 $\Delta t_B$ 、 $\nu$  を用いて表せ。

以下、光強度を等分割するビームスプリッタ ( $r = p = 1/\sqrt{2}$ 、すなわち、強度では  $r^2 = p^2 = 1/2$ ) を考え、反射および透過の位相差は簡単のため  $\phi_r = \pi$ 、 $\phi_p = \pi/2$  とする。また、BSと鏡A、BSと鏡Bとの間の距離を、それぞれ  $L+l$ 、 $L-l$  とする。

3.  $|E_o|^2$  が次式で与えられることを示せ。

$$|E_o|^2 = |E_i|^2 \cos^2 \left( \frac{4\pi\nu l}{c} \right) = \frac{1}{2} |E_i|^2 \left[ \cos \left( \frac{8\pi\nu l}{c} \right) + 1 \right] \quad (1)$$

また、 $|E_s|^2$  も計算し、 $|E_i|^2 = |E_o|^2 + |E_s|^2$  が成り立つことを確かめよ。

次に、単色光ではなく異なる周波数の光からなる多色光を入射させ、 $l$  の値を変えることで二つの鏡の位置を動かしながら測定を行う。 $|E_i|^2$  に比例する入射光スペクトル密度を  $I(\nu)$  とすると、式 (1) より検出器の信号強度は  $l$  の関数

$$P_o(l) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu I(\nu) \left[ \cos \left( \frac{8\pi\nu l}{c} \right) + 1 \right] \quad (2)$$

に比例する。この式はフーリエ変換の形をしているので、 $P_o(l)$  を逆フーリエ変換すれば入射光スペクトル密度  $I(\nu)$  を求めることができる。実際には、二つの鏡の位置をあるステップ幅  $\frac{\Delta l}{4}$  で  $l = \frac{k\Delta l}{4}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) のように離散的に動かしながら信号強度の測定を行う。このとき式 (2) は離散化されて以下のように表される。

$$P_o^k = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu I(\nu) \left[ \cos \left( \frac{2\pi\nu k\Delta l}{c} \right) + 1 \right] \quad (3)$$

4. 特に、入射光が二つの単色光の重ね合わせとして、ディラックの  $\delta$  関数を用いて  $I(\nu) = I_1\delta(\nu - \nu_1) + I_2\delta(\nu - \nu_2)$  と書ける場合、 $P_o^k$  を求めよ。
5. 設問4において  $\nu_1 = \bar{\nu} + \Delta\nu$ ,  $\nu_2 = \bar{\nu} - \Delta\nu$  とおき、 $(I_1, I_2) = (I_0, 0)$  と  $(I_1, I_2) = (0, I_0)$  の二つの場合を考える。この二つの場合について、任意の  $\Delta\nu$  と  $k = 0, 1, 2, \dots$  で  $P_o^k$  が全く同じになるような  $\bar{\nu}$  が存在する。このような  $\bar{\nu} (> 0)$  はステップ幅  $\frac{\Delta l}{4}$  から決まるが、そのうち最小のものを特に  $\nu_n$  とする (これをナイキスト周波数と呼ぶ)。 $\nu_n$  を、 $\Delta l$  と  $c$  を用いて表せ。なお、一般に連続スペクトルを持つ入射光を測定する場合も同様に、 $\nu_n$  より高い周波数成分と、 $\nu_n$  より低い周波数成分とが区別できなくなるという、測定上の不定性が残る。

以上の考察を、黒体放射で近似される宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の測定に応用してみよう。

6. 絶対温度  $T$  の黒体放射のスペクトル密度を表すプランクの式は

$$I(\nu; T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (4)$$

で与えられる。この  $I(\nu; T)$  の近似式として、 $h\nu \ll k_B T$  で成り立つもの (レイリー・ジーンズの放射法則) と  $h\nu \gg k_B T$  で成り立つもの (ウィーン放射法則) をそれぞれ求めよ。

7. CMB は、 $T \approx 2.7\text{K}$  の黒体放射で近似される。このとき、式 (4) で表されるスペクトル密度が最大値をとる周波数  $\nu_{\max}$  を数値で求めよ。関数  $f(x) = x^3 / (e^x - 1)$  が  $x \approx 2.8$  で最大値を取ることを用いてよい。また、設問6で求めた通り、 $I(\nu; T)$  は  $\nu_{\max}$  より十分高い周波数では指数関数的に減少する。このため、たとえば  $\nu_n = 10\nu_{\max}$  を満たすように  $\Delta l$  を定めれば、設問5で議論した測定における不定性の影響を十分小さくすることができる。このときの  $\Delta l$  を数値で求めよ。なお、求めた値には単位をつけること。

第5問

素粒子原子核実験に関する以下の設問に答えよ。真空中の光速を  $c$  とする。

1. 中性子, 陽子, 中性  $\pi$  中間子の質量として最も適当なものを以下の選択肢 a~f からそれぞれ選べ。単位は,  $\text{MeV}/c^2$  である。

a. 0.511    b. 135    c. 494    d. 938    e. 940    f. 1232

2. 中性子のベータ崩壊で生じる粒子をすべて挙げよ。

3. 中性子と物質中の原子核との反応を調べるために, 中性子ビームを厚さ  $d$  の一様な物質に照射したところ, 物質に入射する前の流量  $I_0$  に対して, 物質を透過したあとの流量が  $I_1$  であった。図1に示すように, 中性子ビームが微小な厚さ  $\Delta x$  を透過した際の流量  $I$  の変化量  $\Delta I$  は,  $\Delta I = -n\sigma I \Delta x$  で表される。ここで,  $n$  は物質中の原子核の数密度であり,  $\sigma$  は全反応断面積と呼ばれ, 中性子と原子核の反応確率を反映する量である。 $I_0$  と  $I_1$  の関係を導き,  $\sigma$  を,  $I_0, I_1, d, n$  を用いて表せ。ここでは, 簡単のため, 中性子の崩壊は無視できるものとし, 反応した中性子はすべて原子核に吸収されるものとする。

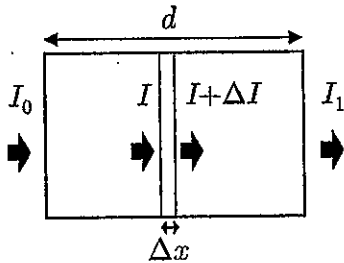


図1: 物質を透過する中性子ビーム。

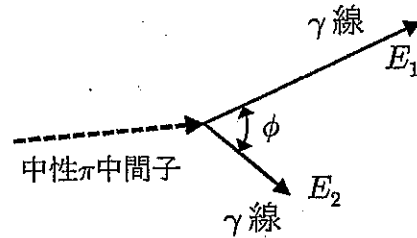


図2: 中性  $\pi$  中間子の崩壊。

次に, 中性  $\pi$  中間子が二つの  $\gamma$  線に崩壊する過程を考える。崩壊により生じる二つの  $\gamma$  線のエネルギーと運動量から中性  $\pi$  中間子の質量を求めることができる。

4. 図2に示すように, 崩壊によって生成された二つの  $\gamma$  線のエネルギーを  $E_1, E_2$ , 二つの  $\gamma$  線の運動量の間角度を  $\phi$  とする。中性  $\pi$  中間子の質量を,  $E_1, E_2, \phi, c$  を用いて表せ。

$\gamma$ 線のエネルギーは、電磁シャワーと呼ばれる現象を利用して測定することができる。電磁シャワーとは、原子核近傍の強い電場によって、 $\gamma$ 線による電子・陽電子の対生成と電子および陽電子の制動放射が繰り返し発生する現象である。ここでは、一つの原子核の近傍での電子の制動放射を考える。

5. 制動放射によって単位時間あたりに放出されるエネルギー  $P$  は、原子核近傍における電子の加速度  $a$ 、素電荷  $e$ 、真空の誘電率  $\epsilon_0$ 、光速  $c$  により、 $P = Aa^2 e^2 \epsilon_0^{-1} c^{-3}$  と表すことができる。ここで、 $A$  は物質によらない無次元の定数である。MKSA 単位系における物理量の次元を考えることで、べき指数  $f, g, h, i$  を求めよ。また、制動放射がアルミニウム原子核近傍で起こった場合と鉛原子核近傍で起こった場合で、どちらが  $P$  が大きくなるか、理由を含めて答えよ。

最後に、電荷  $q (> 0)$  を持つ荷電粒子の運動量を測定するための実験手法を考える。図3の点線で囲まれた部分のみに、紙面に対して垂直に表から裏の向きに磁束密度  $B (> 0)$  の一様な磁場が存在する。磁場に垂直な運動量を持つ荷電粒子が図の左側から入射する。図3の入射角  $\theta_1$  と出射角  $\theta_2$  を、検出器1と検出器2を用いて測定する。入射面と出射面との距離は  $L$  である。荷電粒子の電磁波の放射は無視してよい。

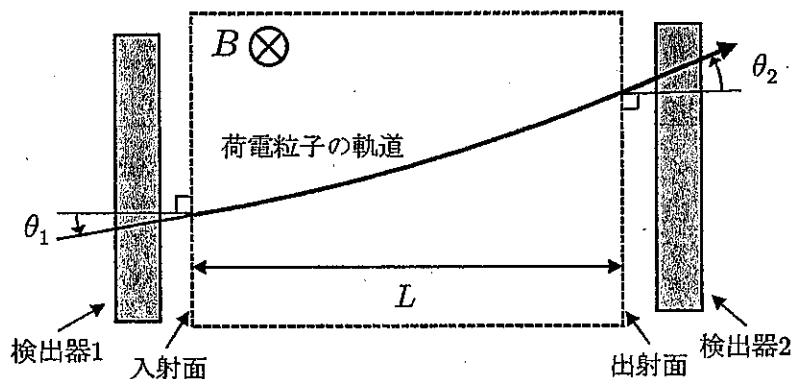


図3: 運動量を測定するための実験装置の概念図。

6. 荷電粒子の運動量の大きさ  $p$  は、荷電粒子の電荷  $q$ 、磁束密度  $B$ 、磁場中での荷電粒子の軌道の曲率半径  $R$  により、 $p = qBR$  と表されることを示せ。また、 $R$  が  $\frac{L}{\sin \theta_2 - \sin \theta_1}$  と表されることを示せ。
7. 検出器による  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の測定には誤差があり、測定値  $\theta_1$  と  $\theta_2$  と真の値の差は、それぞれ標準偏差  $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$  の正規分布に従うとする。この時、 $\theta_1$  と  $\theta_2$  から求めた曲率  $\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\sin \theta_2 - \sin \theta_1}{L}$  と真の値の差は近似的に正規分布に従い、その標準偏差を  $\Delta\kappa$  とする。 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$  は十分に小さい。 $\Delta\kappa$  を、 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, L$  を用いて表せ。 $\Delta\theta_1$  と  $\Delta\theta_2$  の間には相関が無いものとし、 $L$  には誤差は無いものとする。また、 $\theta_1, \theta_2$  は小さく、 $\sin \theta_1 \approx \theta_1, \sin \theta_2 \approx \theta_2$  と近似してよい。

第6問

テレビ用のアンテナケーブルなど、高周波電気信号を高速度で伝送するのに同軸ケーブルがよく用いられる。図1に示すように、同軸ケーブルは円柱形の内部導体を円筒形の絶縁体と外部導体で覆った構造をしている。中心軸方向を  $x$  軸にとり、単位長さあたりの電気容量を  $C$ 、自己インダクタンスを  $L$  とおく。内部導体を流れる電流  $I$  (外部導体を流れる電流と逆向き) と両導体間の電圧  $V$  は  $x$  と時刻  $t$  の関数であり、両者の間には

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (2)$$

の関係がある。以下の設問に答えよ。必要に応じて、真空中の光速  $c = 3.0 \times 10^8$  m/s, 真空の透磁率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m を用いよ。以下、概算する場合は有効数字1桁でよいが、答えには単位を明記すること。

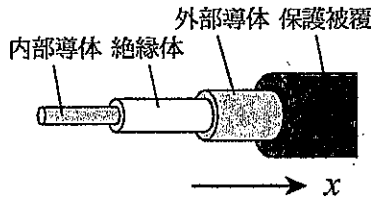


図1:

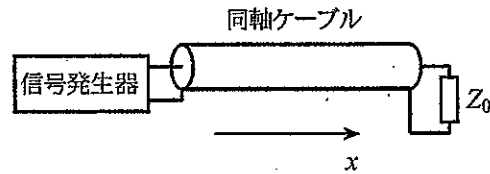


図2:

1. 式(1)と(2)より  $I$  または  $V$  に関する波動方程式を導き、同軸ケーブルでの電気信号の伝送速度  $v$  を、 $C$  と  $L$  を用いて表せ。
2.  $C$  と  $L$  は、内部導体の半径を  $a$ 、外部導体の内半径を  $b$ 、絶縁体の誘電率を  $\epsilon$  とし、また絶縁体の透磁率が真空の透磁率  $\mu_0$  と等しいとして、

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\log(\frac{b}{a})}, \quad L = \frac{\mu_0 \log(\frac{b}{a})}{2\pi} \quad (3)$$

で与えられる。 $\log(b/a) = 1.8$ 、絶縁体の比誘電率が2.2の同軸ケーブルを伝播する周波数  $f = 500$  MHz の正弦波に対して、波長  $\lambda$  を概算せよ。

3.  $x$  軸正方向に伝送される電圧と電流の波において、両者の間には比例関係  $V = Z_0 I$  が成り立つ。ここで、 $Z_0$  は特性インピーダンスと呼ばれるケーブルの構造によって決定される実定数である。同軸ケーブルの終端での反射を防ぐためには、図2のように、抵抗値が  $Z_0$  と等しい抵抗器を接続する必要がある。まず、 $Z_0$  を、 $C$  と  $L$  を用いて表せ。そのうち、設問2の同軸ケーブルに対して  $Z_0$  を概算せよ。

4. 次に、終端に  $Z_0$  と異なる抵抗値  $r$  をもつ抵抗器をつなげたときの反射を考える。図3のように、電圧の高さが  $V_1$  のパルス波を入力した場合に対して、反射により生じるパルス波の電圧の高さ  $V_2$  を、 $r, Z_0, V_1$  を用いて表せ。

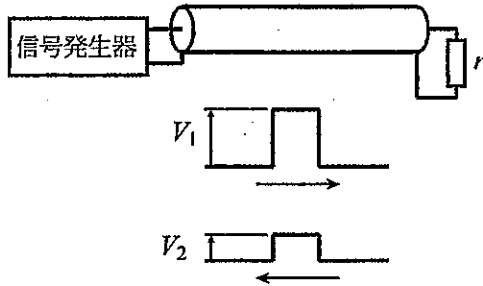


図 3:

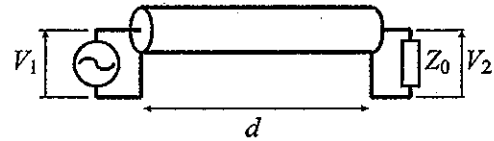


図 4:

5. 内部導体の電気抵抗を考慮した場合、式(2)は

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI \quad (4)$$

に置き換えられる。ここで、 $R$  は内部導体の軸方向の単位長さ当たりの電気抵抗であり、信号の減衰を引き起こす。図4のように、長さ  $d$  の同軸ケーブルの左端において振幅  $V_1$ 、角周波数  $\omega$  の正弦波の交流電圧（複素表示で  $V = V_1 e^{-i\omega t}$ ）を与えたとき、右端での交流電圧の振幅  $V_2$  を答えよ。ただし、 $L\omega$  は  $R$  に比べて十分に大きいものとして近似計算を行ってよい。また、反射を防ぐために右端には抵抗値  $Z_0$  の抵抗器が繋がれている。

6. 高周波では、電流は導体の表面近傍の狭い領域に集中して流れる。この現象は表皮効果と呼ばれ、実効的な導体の断面積の減少により設問5で論じた信号の減衰を顕著にする。さて、簡単な例として、半径  $a$  の円柱導体の軸方向に角周波数  $\omega$  の正弦波の交流電流が流れている場合を考えよう。電流密度は軸方向成分のみをもち、中心軸からの距離  $r$  ( $r \leq a$ ) の関数として、複素表示で  $j(r, t) = J(r) e^{-i\omega t}$  と表される。ここで、 $j(r, t)$  の位相は  $r$  に依存するので、 $J(r)$  は一般に複素数となる。電流とそれにより作られる円周方向の磁束密度  $B(r, t)$  との関係、磁束密度の時間変動と軸方向に生じる誘導電場  $E(r, t)$  との関係、および電流密度と電場との比例関係  $j(r, t) = \sigma E(r, t)$  ( $\sigma$  は導体の電気伝導率) より、 $J(r)$  に関する微分方程式が得られる。表面近傍 ( $r \approx a$ ) における電流密度の振幅が、 $|J(r)| \approx |J(a)| \exp[(r-a)/\delta]$  と近似できるものとして、表皮深さ (skin depth) と呼ばれる長さ  $\delta$  ( $\ll a$ ) を  $\omega, \sigma, \mu$  を用いて表せ。

