受験番号	
氏　　名	

平成２９年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２８年８月２２日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(数学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

実数 $t \geq 0$ において定義されている関数 $f(t)$ に対するラプラス変換 $L[f(t)]$ は，複素数 s を用いて積分

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

で定義される。また，$t \geq 0$ における $F(s)$ の逆ラプラス変換 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ は，s に関する複素積分を用いて

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds \tag{1}$$

と表される。ここで式 (1) の積分路は，実部が γ で虚軸に平行な直線であり，γ は $F(s)$ のすべての特異点が積分路の左側になるように選ぶ。以下の設問に答えよ。

1. 実数 $t \geq 0$ において定義されている以下の (i)〜(iii) の関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。また，ラプラス変換の積分が収束するための s に対する条件を各々示せ。

   (i) $f(t) = t$

   (ii) $f(t) = \sin \omega t$ (ω は正の実数)

   (iii) $f(t) = \sqrt{t}$ (≥ 0)

2. ラプラス変換を用いて次の積分方程式の解 $f(t)$ を求める。

$$f(t) = \sin t + \int_0^t \sin(t - t') f(t') dt' \quad (t \geq 0) \tag{2}$$

   (i) 一般に関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ のたたみ込みを $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t - t') f_2(t') dt'$ と定義する。$f_1(t)$ と $f_2(t)$ の各々のラプラス変換を $F_1(s)$, $F_2(s)$ とするとき，$(f_1 * f_2)(t)$ のラプラス変換は

$$L[(f_1 * f_2)(t)] = F_1(s) F_2(s) \tag{3}$$

   となることを示せ。

   (ii) 式 (3) を用いて式 (2) の両辺をラプラス変換し，$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。

   (iii) $f(t)$ を求めよ。

3. $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}$ の逆ラプラス変換 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ を求めよ。

第 2 問

3 次元実ベクトル空間について，以下の設問に答えよ。

ただし，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を単位ベクトル，すなわち $\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1$ を満たす 3 次元ベクトルとする。

1. $\vec{x}$ を任意の 3 次元ベクトルとするとき，外積 $\vec{a} \times \vec{x}$ は行列 $J(\vec{a})$ を用いて $\vec{a} \times \vec{x} = J(\vec{a})\vec{x}$ と書くことができる。行列 $J(\vec{a})$ を求めよ。

2. 行列 $J(\vec{a})$ の固有値をすべて求めよ。

3. $P(\vec{a}) = -J(\vec{a})^2$ と定義する。以下の (i)〜(iii) の等式を示せ。

   (i) $P(\vec{a})\vec{a} = \vec{0}$

   (ii) $\vec{a}$ と直交するすべてのベクトル $\vec{b}$ に対して $P(\vec{a})\vec{b} = \vec{b}$

   (iii) $P(\vec{a})^2 = P(\vec{a})$

4. θ を任意の実数とする行列 $\exp(\theta J(\vec{a}))$ は，次のように展開することができる。

$$\exp(\theta J(\vec{a})) = f_1(\theta)I + f_2(\theta)P(\vec{a}) + f_3(\theta)J(\vec{a})P(\vec{a})$$

   ここで I は単位行列であり，$f_i(\theta)$ $(i = 1, 2, 3)$ は $\vec{a}$ によらない θ の関数である。$f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ を求めよ。ただし，行列の指数関数は $\exp(\theta J(\vec{a})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} J(\vec{a})^n$ と定義される。

5. $\vec{a}$ と直交する単位ベクトルの一つを $\vec{b}$ とし，$\vec{c}$ を $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ と定義すると，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は正規直交基底となる。行列 $\exp(\theta J(\vec{a}))$ と $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ それぞれとの積を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の線形和で表し，この行列が $\vec{a}$ を軸とした角度 θ の回転を表すことを示せ。

6. $\vec{b}, \vec{c}$ を設問 5 で与えたベクトルとする。任意の実数 θ, φ に対して，実数 χ と単位ベクトル $\vec{e}$ を選ぶことにより

$$\exp(\theta J(\vec{a})) \exp(\varphi J(\vec{b})) \exp(-\theta J(\vec{a})) = \exp(\chi J(\vec{e}))$$

   と書くことができる。$\vec{e}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の線形和で表し，χ を求めよ。