受験番号	
氏　　名	

平成３０年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２９年８月２１日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(数学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第 1 問

2 成分の行ベクトル $A=(a,b)$ について考える。ただし a，b はゼロでない実数とする。また，以下では T は行列の転置を表す。例えば，A^T は A を転置した列ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を表し，A^TA は次のような 2 行 2 列の行列となる。

$$A^TA = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

1. A^TA の全ての固有値と固有ベクトルを求めよ。

2. 2 成分の行ベクトル B と 2 行 2 列の行列 V を用いて $A=BV$ と分解する。ここで B は，正の実数 c を用いて $B=(c,0)$ という形をとり，V は実対称直交行列となるように選ぶ。c と V をそれぞれ a，b を用いて表せ。

3. $B\widetilde{B}=1$ を満たし，$\widetilde{B}B$ が 2 行 2 列の実対称行列となるような列ベクトル $\widetilde{B}$ を c を用いて書け。

4. $A\widetilde{A}=1$ を満たし，$\widetilde{A}A$ が 2 行 2 列の実対称行列となるような列ベクトル $\widetilde{A}$ は一意に定まる。$\widetilde{A}$ を $\widetilde{B}$ と V を用いて書け。

つぎに，n 成分の行ベクトル $A_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ について考える。ただし a_1，a_2，$\cdots$，a_n はゼロでない実数であり，$n\geq 3$ とする。

5. ゼロでない実数 v に対して，$A_nX=v$ を満たす n 成分の列ベクトル X のうち，$\|X\|^2 = X^TX$ が最小となる $X=X_0$ を求めよ。また，このように求めた X_0 は，v によらない列ベクトル $\widetilde{A}_n$ を用いて $X_0=v\widetilde{A}_n$ と書ける。このとき，$A_n\widetilde{A}_n=1$ が成り立ち，$\widetilde{A}_nA_n$ が実対称行列であることを示せ。

6. 任意の行列 M に対して，M^TM のゼロでない固有値は，MM^T の固有値となることを示せ。このことを用いて，n 行 n 列の行列 $A_n^TA_n$ の全ての固有値を求めよ。

7. 一般には，重複する固有値を持つ行列は対角化可能であるとは限らない。$A_n^TA_n$ が対角化可能か否かを理由とともに述べよ。

第 2 問

1. 二変数関数 $u(t,x)$ が次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を満たすとする。微分可能な関数 $f(x)$ を用いて

$$u(t=0,x) = f(x)$$

と初期条件が与えられるとき，$t > 0$ での解 $u(t,x)$ を書け。

2. 一変数関数 $u(x)$ が次の微分方程式

$$u\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} \tag{1}$$

を満たすとする。ただし，$u(x)$ は無限領域上で微分可能とする。

(i) 式 (1) を

$$\frac{d}{dx}F = 0$$

の形に表したときの F を，u と $\dfrac{du}{dx}$ を用いて書け。

(ii) 境界条件

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} u(x) &= W \\ \lim_{x\to+\infty} u(x) &= -W \\ u(x=0) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす解 $u(x)$ を求めよ。ここで，W は正の定数である。

3. 二変数関数 $u(t,x)$ が次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

を満たすとする。ここで，D は正の定数である。この非線形方程式を線形方程式に帰着させて解く手順を考える。

(i) 次の偏微分方程式

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + D\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \tag{3}$$

を満たす関数 $s(t,x)$ によって

$$u^*(t,x) = -\frac{\partial s(t,x)}{\partial x}$$

と与えられる $u^*(t,x)$ は，式 (2) の解となることを示せ。

(ii) 関数 $\phi(t,x)$ が次の線形偏微分方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{4}$$

を満たすとする。ある関数 $S(\phi)$ によって

$$s^*(t,x) = S\left(\phi(t,x)\right)$$

と与えられる $s^*(t,x)$ が式 (3) の解となるとき，$S(\phi)$ が満たす微分方程式を導け。さらに $S(\phi)$ を求めよ。

(iii) $\phi(t,x)$ は，次のように定義されるフーリエ変換によって

$$\phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(t,k)\, e^{\mathrm{i}kx}\, dk$$

と表されるとする。ここで，i は虚数単位を表す。$\tilde{\phi}(t,k)$ が満たす微分方程式を式 (4) から導け。さらに，関数 $g(k)$ を用いて

$$\tilde{\phi}(t=0,k) = g(k)$$

と初期条件が与えられるとき，$t>0$ での解 $\tilde{\phi}(t,k)$ を求めよ。