受験番号	
氏　　名	

平成３１年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成３０年８月２０日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第１問

以下の設問に答えよ。ただし正方行列 X，Y に対して $\mathrm{tr}X$ は X のトレース，$\det X$ は X の行列式を表し，$[X,Y]=XY-YX$，$e^X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$ とする。また，行列 X に対して，X^{T} は X の転置，$X^\dagger$ は X のエルミート共役（転置の複素共役）を表す。ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ および $\mathbf{x}^\dagger$ も同様である。I は単位行列を表す。虚数単位を i とする。

1. A,B をエルミート（$A^\dagger=A, B^\dagger=B$）かつトレースレス（$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B=0$）な有限次元の行列とする。以下の (i)〜(iii) を示せ。ただしエルミート行列 A が対角行列 D とユニタリー行列 V（$V^\dagger V=I$）を用いて $A=V^\dagger DV$ と対角化できること，および同じ型の正方行列 X,Y に対して $\det(XY)=\det X\det Y$ が成り立つことを用いてもよい。

   (i) $\mathrm{i}[A,B]$ はエルミートかつトレースレスである。

   (ii) $U=e^{\mathrm{i}A}$ はユニタリー行列（$U^\dagger U=I$）である。

   (iii) $U=e^{\mathrm{i}A}$ は $\det U=1$ をみたす。

任意のトレースレスな３行３列エルミート行列 T は８つの実数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_8$ と８つのトレースレスな３行３列エルミート行列 $T_1,T_2,\cdots T_8$ を用いて以下のように表すことができる。

$$T=\begin{pmatrix}\alpha_7 & \alpha_1-\mathrm{i}\alpha_2 & \alpha_3-\mathrm{i}\alpha_4\\ \alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2 & \alpha_8 & \alpha_5-\mathrm{i}\alpha_6\\ \alpha_3+\mathrm{i}\alpha_4 & \alpha_5+\mathrm{i}\alpha_6 & -\alpha_7-\alpha_8\end{pmatrix}=\sum_{a=1}^{8}\alpha_a T_a$$

2. 行列 T_1,T_2 および T_7 の具体形を書け。

3. 設問１の (i) より，実数 $A_{ab,c}$（$a,b,c=1,2,\cdots 8$）を用いて $[T_a,T_b]=\mathrm{i}\sum_{c=1}^{8}A_{ab,c}T_c$ と書ける。$A_{71,2}$ および $A_{56,8}$ を求めよ。

4. 実数 θ を用いて行列 U を $U=e^{\mathrm{i}\theta T}=\exp\left(\mathrm{i}\theta\sum_{a=1}^{8}\alpha_a T_a\right)$ と定義し，複素３成分のベクトル $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，およびそれらに U をかけたベクトル $\mathbf{x}'=U\mathbf{x}$，$\mathbf{y}'=U\mathbf{y}$ を考える。

   (i) $G_a=\mathbf{x}^\dagger T_a\mathbf{y}$，$G'_a=\mathbf{x}'^\dagger T_a\mathbf{y}'$ とする（$a=1,2,\cdots 8$）。G'_a を θ の１次まで展開すると，$G'_a=G_a+\mathrm{i}\theta\sum_{b=1}^{8}H_{ab}G_b+\mathcal{O}(\theta^2)$ の形に書けることを示し，H_{ab} を求めよ。

   (ii) $z_i=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}x_jy_k$，$z'_i=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}x'_jy'_k$ とし，$\mathbf{z}=(z_1,z_2,z_3)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{z}'=(z'_1,z'_2,z'_3)^{\mathrm{T}}$ とする。$\mathbf{z}'$ を θ の１次まで展開すると $\mathbf{z}'=(I+\mathrm{i}\theta M)\mathbf{z}+\mathcal{O}(\theta^2)$ の形に書けることを示し，行列 M を求めよ。ただし ε_{ijk} は３階の完全反対称テンソルで，$\varepsilon_{123}=1$，$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{kji}$ である。$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}=\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}$ を用いてもよい（$\delta_{i\ell}$ 等はクロネッカーの δ 記号を表す）。

第２問

x 軸上の区間 $[0,\pi]$ で定義された関数に作用する以下の演算子を考える。

$$H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} - m_\alpha^2$$

ここで，m_α は正の実数定数，$\alpha = 1, 2$ である。H_α の n 番目に小さい固有値を $\lambda_\alpha^{(n)}$，対応する固有関数を $f_\alpha^{(n)}(x)$ とする（$n = 1, 2, 3, \cdots$）。

$$H_\alpha f_\alpha^{(n)}(x) = \lambda_\alpha^{(n)} f_\alpha^{(n)}(x)$$

固有関数 $f_\alpha^{(n)}(x)$ は $x = 0$ と $x = \pi$ で，それぞれ以下の境界条件を満たすものとする。

$$\left.\frac{df_\alpha^{(n)}(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad f_\alpha^{(n)}(\pi) = 0$$

ただし，$f_\alpha^{(n)}(x) = 0$ という自明な解は考えない。

1. $\lambda_\alpha^{(n)}$ と $f_\alpha^{(n)}(x)$ を求めよ。固有関数は規格化しなくてよい。

2. $m_\alpha < \dfrac{1}{2}$ として，次の量 D を計算することを考える。

$$D = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}}$$

そのため，s に関して解析的な関数 $Z(s)$ を導入する。

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda_2^{(n)})^{-s} - (\lambda_1^{(n)})^{-s} \right]$$

（s の実部が小さく上の無限和が収束しない領域では，$Z(s)$ は解析接続により与える。）
以下，s に関する微分を

$$Z'(s) = \frac{d}{ds} Z(s)$$

と表す。また，必要であれば以下の式を用いてもよい。

$$\int_{\mathrm{C}_0} \frac{dz}{z} = 2\pi \mathrm{i}$$

ただし，C_0 は z の複素平面上で原点を反時計回りに１周する閉曲線，i は虚数単位である。

(i) λ を定数として，次の微分を実行せよ。

$$\frac{d}{ds}\lambda^{-s}$$

(ii) D を $Z'(0)$ を用いて表せ。

(iii) λ を $-m_\alpha^2$ より大きい実数定数として，以下の微分方程式と境界条件を満たす関数 $g_\alpha(x;\lambda)$ を求めよ。

$$H_\alpha g_\alpha(x;\lambda) = \lambda g_\alpha(x;\lambda), \quad g_\alpha(0;\lambda) = 1, \quad \left.\frac{\partial g_\alpha(x;\lambda)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

(iv) 前問で与えられた関数 $g_\alpha(x;\lambda)$ の $x=\pi$ における値を用いて

$$\tilde{g}_\alpha(\lambda) = g_\alpha(x=\pi;\lambda)$$

とする。λ が複素数である場合，$\tilde{g}_\alpha(\lambda)$ は解析接続により与える。$\tilde{g}_\alpha(\lambda)$ のゼロ点は $\lambda = \lambda_\alpha^{(n)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であり，その近傍で $\tilde{g}_\alpha(\lambda) = k_\alpha^{(n)}(\lambda-\lambda_\alpha^{(n)})+\mathcal{O}[(\lambda-\lambda_\alpha^{(n)})^2]$ ($k_\alpha^{(n)}$ はゼロでない定数) となることに注意し，以下の関係式が成り立つことを示すとともに定数 A を求めよ。

$$Z(s) = A\int_{\mathrm{C}} \lambda^{-s}\left[\frac{1}{\tilde{g}_2(\lambda)}\frac{d\tilde{g}_2(\lambda)}{d\lambda} - \frac{1}{\tilde{g}_1(\lambda)}\frac{d\tilde{g}_1(\lambda)}{d\lambda}\right]d\lambda$$

ただし，積分経路 C は λ の複素平面上で全ての固有値 $\lambda_1^{(n)}$，$\lambda_2^{(n)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を囲む実軸に沿った経路，λ^{-s} のブランチカット（切断線）は原点 O から実軸との角度 θ ($\theta \neq 0$) の方向に伸びる半直線とする（図 1 参照)。また s の実部は上の積分が収束する程度に大きいとしてよい。

(v) $Z'(0)$ を $\tilde{g}_1(0)$ と $\tilde{g}_2(0)$ を用いて表せ。前問に与えられた積分において，経路を C から $\mathrm{C_{in}}$ と $\mathrm{C_{out}}$ を合成した経路（図 1 参照）に変形できることを用いてよい。

(vi) $\tilde{g}_\alpha(0)$ を具体的に計算し，D を m_1 と m_2 を用いて表せ。

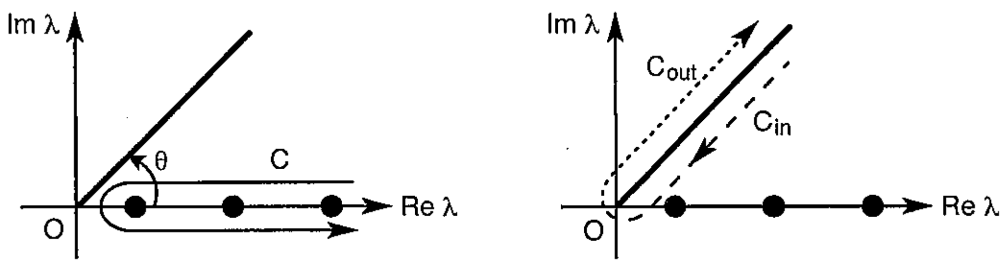

図 1: 積分経路 C（実線），$\mathrm{C_{in}}$（破線），及び $\mathrm{C_{out}}$（点線）。図中の黒丸は $\lambda_1^{(n)}$，$\lambda_2^{(n)}$ ($n = 1,2,3,\cdots$)，太い実線はブランチカット（切断線）を表す。