受験番号	
氏　　名	

平成２７年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２７年２月２日（月）　９時３０分～１１時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入してください。
3. 問題は全部で３問あります。
   第１－３問をそれぞれ別の答案用紙（計３枚）に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。
4. 答案用紙を計算用紙として使用してはいけません。計算用紙は別に配付します。

第１問

1. 角運動量演算子を直交座標 x, y, z を用いて

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

のように定義する。ここで $2\pi\hbar$ はプランク定数である。L_x, L_y, L_z の間の交換関係を与えよ。また，全角運動量 $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ と L_z は可換であることを示せ。

2. $\mathbf{L}^2$ と L_z の同時固有関数 $Y_{l,m}$ は球面調和関数と呼ばれ以下の関係式を満たす。

$$\mathbf{L}^2 Y_{l,m} = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}, \quad L_z Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m}$$

ここで l は 0 以上の整数，m は $-l \leq m \leq l$ という条件を満たす整数である。角運動量の交換関係を用いて，

$$\mathbf{L}^2(L_\pm Y_{l,m}) = l(l+1)\hbar^2(L_\pm Y_{l,m}), \quad L_z(L_\pm Y_{l,m}) = \hbar(m \pm 1)(L_\pm Y_{l,m})$$

となることを示せ。ここで $L_\pm = L_x \pm iL_y$ である。また

$$L_+ Y_{l,l} = L_- Y_{l,-l} = 0$$

となることを示せ。

次に中心力の下での量子力学系を考える。ハミルトニアンは極座標表示で以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(r) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Omega \\ \Omega &= \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \end{aligned}$$

ここで M は粒子の質量，$\mathbf{L}^2$ は上で与えた全角運動演算子の極座標表示である。ポテンシャルエネルギー $V(r)$ は動径 r のみの関数とする。

3. シュレディンガー方程式は波動関数を $\psi(r,\theta,\varphi)$，エネルギー固有値を E として $H\psi = E\psi$ と書かれる。波動関数を $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ のように変数分離形に書き，$Y(\theta,\varphi) = Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ とおいた場合に $R(r)$ が満たすべき固有値方程式を書き下せ。

ポテンシャル $V(r)$ が井戸型の場合を考える。すなわち v と a を正の定数として $V(r) = -\frac{\hbar^2 v}{2M}$ ($r < a$ の時), $V(r) = 0$ ($r > a$ の時) と定義する。以下では簡単のため $l = 0$ の場合を考え，束縛状態がいくつあるのかを考察する。

4. 動径方向の波動関数を $R(r) = \chi(r)/r$ のように書いた時，$\chi(r)$ が満たす方程式を求めよ。計算を簡単化するため $E = -\frac{\hbar^2 \epsilon}{2M}$ とおけ。

5. $r = 0$ で $R(r)$ が有限，かつ $r = \infty$ で $R(r)$ がゼロとなることを要請する。この時 $\chi(r)$ の具体形を $r < a$, $r > a$ の領域に対してそれぞれ書き下せ。なお，波動関数の規格化因子を定める必要はない。

6. $r = a$ における接続条件を求めよ。束縛状態の数が v が小さい時ゼロであり，v が大きくなると徐々に増えていくことをグラフを用いて示せ。

第 2 問

大きさ $S=1/2$ の電子スピンを考える。スピン演算子 $\mathbf{S}=(S^x,S^y,S^z)$ の z 成分 (S^z) の固有値 $\frac{1}{2}$ の固有状態を $|\uparrow\rangle$, 固有値 $-\frac{1}{2}$ の固有状態を $|\downarrow\rangle$ とする。また, $S^x|\uparrow\rangle=\frac{1}{2}|\downarrow\rangle$, $S^x|\downarrow\rangle=\frac{1}{2}|\uparrow\rangle$, $S^y|\uparrow\rangle=-\frac{i}{2}|\downarrow\rangle$, $S^y|\downarrow\rangle=\frac{i}{2}|\uparrow\rangle$ である。

以下では, ディラック定数 $\hbar$ (プランク定数 h を 2π で割ったもの) とボルツマン定数 k_{B} をともに 1 とする。必要に応じて, 2 倍角の公式 $\cos 2\phi=\cos^2\phi-\sin^2\phi$, $\sin 2\phi=2\sin\phi\cos\phi$ を用いても良い。

1. $S=1/2$ のスピン演算子は, $(S^\alpha)^2=\mathrm{I}/4$ $(\alpha=x,y,z)$ を満たす (I は恒等演算子)。これを用いて以下の恒等式を示せ。ただし, θ は実数とする。

$$e^{i\theta S^\alpha}=\mathrm{I}\cos\frac{\theta}{2}+2iS^\alpha\sin\frac{\theta}{2}\quad(\alpha=x,y,z)$$

2. 状態 $|\uparrow\rangle$ にユニタリー演算子 $U(\theta)=e^{i\theta S^x}$ を作用させることにより生成される状態について, S^z および S^y の期待値を求めよ。また, この変換 $U(\theta)$ の物理的意味を述べよ。

次に, z 軸方向の磁場中の互いに相互作用する 2 つの $S=1/2$ スピンを考える。この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=J\,\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2-H(S_1^z+S_2^z)$$

で与えられる。

3. 全ての固有値と固有状態を求めよ。固有状態は $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ それぞれの z 成分 $(S_1^z,\,S_2^z)$ の固有ベクトル $(|\uparrow\rangle_1,\,|\downarrow\rangle_1,\,|\uparrow\rangle_2,\,|\downarrow\rangle_2)$ を用いて表せ。

4. 相互作用が反強磁性的 $(J>0)$, かつ磁場の絶対値が J に比べて十分に小さい場合, 基底状態は変換 $U_{12}(\theta)=e^{i\theta(S_1^x+S_2^x)}$ に関して不変である。その理由を述べよ。

5. この系が温度 T の熱浴に接して熱平衡状態にあるとする。この系の自由エネルギーと z 軸方向の磁化を温度 T と磁場 H の関数として求めよ。

6. 相互作用が反強磁性的 $(J>0)$ である場合を考える。i) 温度 T が J に比べ十分小さい場合, ii) J に比べ十分大きい場合, の 2 通りについて, 磁化の磁場 H 依存性の概形を示せ。

第 3 問

質量 m, 電荷 $q\,(>0)$ をもつ粒子の電磁場中での運動を考える。電場 $\boldsymbol{E}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動するとき，この粒子はローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1}$$

を受ける。以下の設問では，粒子の速さ $|\boldsymbol{v}|$ は光速より十分小さく，相対論的効果は無視できるものとする。また，荷電粒子の運動による電磁波の放射も考えなくても良い。

まず，磁束密度はない $(\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0})$ 場合を考える。時刻 $t = 0$ において，荷電粒子は原点に静止しているものとする。

1. 時間変化しない一様電場 $\boldsymbol{E} = (E_0, 0, 0)$ (ただし E_0 は正の定数) のみが与えられているとき，荷電粒子は電場の影響で運動し，点 $(d, 0, 0)$ $(d > 0)$ に到達した。その時に荷電粒子が持つ運動エネルギーを求めよ。

2. 一様電場が $\boldsymbol{E} = (E_0 \cos(\omega t), 0, 0)$ と時間変動するとき，荷電粒子の運動を記述せよ。

次に，定常磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ $(B > 0)$ が加えられている時の粒子の運動を考える。

3. 電場が存在しない $(\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0})$ とき，時刻 $t = 0$ に原点から荷電粒子を速度 $(v_0, 0, 0)$ で打ち出したところ，粒子は等速円運動を行った。この運動の速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}(t)$ と回転周期 P を求めよ。

4. 設問 3 の運動において，運動エネルギーは一定である。その物理的な理由を簡潔に説明せよ。

5. 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に加えて，定常一様電場 $\boldsymbol{E} = (E_0, 0, 0)$ が与えられている場合の荷電粒子の x-y 平面内での運動を考える。設問 3 で求められた等速円運動を表す $\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$ と，回転中心の等速運動を表す $\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$ を用いて，粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$ と表現することで，運動方程式を満たす解を求めることができる。時刻 $t = 0$ において $\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = (v_0, 0, 0)$ とするとき，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$ を求めよ。また，粒子の運動の概略を図示せよ。

6. 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に加えて，y-z 平面周りの微小領域 $(-\varepsilon/2 \le x \le \varepsilon/2)$ にだけ，時間変動する一様電場 $\boldsymbol{E} = (E_0 \cos(2\pi t/P), 0, 0)$ がある場合を考える。ただし，P は設問 3 で求められた回転周期である。荷電粒子が時刻 $t = 0$ に原点から速度 $(v_0, 0, 0)$ (ただし $v_0 > 0$) で打ち出されたとき，その運動の概略を図示して説明せよ。