受験番号	
氏　　名	

平成２９年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２９年１月３０日（月）９時３０分～１１時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入してください。
3. 問題は全部で３問あります。
   第１－３問をそれぞれ別の答案用紙(計３枚)に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。
4. 答案用紙を計算用紙として使用してはいけません。計算用紙は別に配付します。

第１問

１次元井戸型ポテンシャル中の電子の運動を考える。座標を x で表し，ポテンシャルを $V(x)$ とする。電子の質量を m とし，プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とすると，電子の波動関数 $\Psi(x)$ が従うシュレーディンガー方程式は，

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right\}\Psi(x)=E\,\Psi(x)$$

と与えられる。ここで E はエネルギー固有値を表す。

まず，ポテンシャル $V(x)$ は $x=0$ と $x=a$ に無限に高い壁を持ち，

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ -V_0, & 0\le x\le a\\ \infty, & a<x\end{cases}$$

となっているものとする（図１参照）。$V_0>0$ とする。

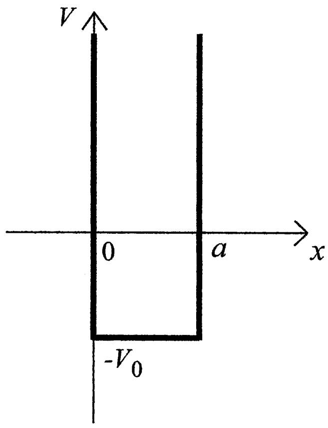

図 1: ポテンシャル

1. ポテンシャル $V(x)$ 中に電子が１個いる時のエネルギー固有状態を考える。$x=0$ および $x=a$ において波動関数が満たすべき境界条件を述べよ。エネルギー固有値の低い方から順番に $n=1,2,3,\ldots$ と番号をつける。ただし，この設問では電子のスピンは考慮しないこととする。n 番目のエネルギー固有値，及び，それに対応する規格化された波動関数を示せ。

2. 次に電子が３個いる場合を考える。この設問では，電子はスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子であることを考慮して，３電子系の基底状態のエネルギー固有値と縮退度を示せ。さらに，第一励起状態のエネルギー固有値と縮退度も示せ。ただし，電子間のクーロン相互作用は無視せよ。

次に，図2に示されているような，以下のポテンシャルを考えることにする。

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ -V_0, & 0\le x\le a\\ 0, & a<x\end{cases}$$

ここで$V_0>0$とする。

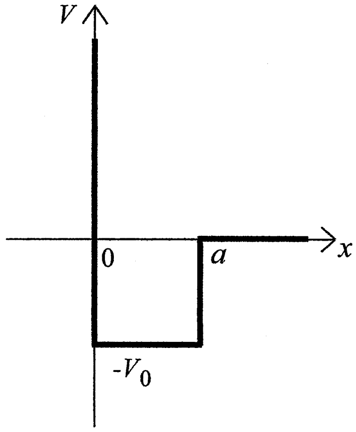

図 2: ポテンシャル

このポテンシャルに電子が1個束縛されている場合のエネルギー固有状態を考える。束縛された固有状態が存在すれば$-V_0<E<0$が成り立つことに留意して，以下の設問に答えよ。

3. 固有エネルギーEが分かっているとして，領域$0\le x\le a$における波動関数$\Psi(x)$を規格化定数C_1，座標x，及び，以下に定義するk_1のみで表せ。規格化定数C_1は求めなくてよい。

$$k_1=\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

4. 固有エネルギーEが分かっているとして，領域$a<x$における波動関数$\Psi(x)$を規格化定数C_2，座標x，及び，以下に定義するk_2のみで表せ。規格化定数C_2は求めなくてよい。

$$k_2=\frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$$

5. $x=a$で波動関数が満たすべき境界条件の式を示せ。また，その理由は何か述べよ。

6. 設問5で求めた境界条件，及び，k_1とk_2が満たす条件から，束縛状態が存在するためにV_0が満たすべき条件を示せ。

第 2 問

2 次元電子系の統計力学を考察しよう。空間は一辺の長さが L の正方形として，周期境界条件を採用する。まず，電子が一つある場合を考える。電子の質量を m，プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ として，以下の設問に答えよ。

1. シュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y)=E\Psi(x,y)$$

および周期境界条件

$$\Psi(x+L,y)=\Psi(x,y+L)=\Psi(x,y)$$

から，電子の波動関数 $\Psi(x,y)$ は

$$\Psi(x,y)=Ae^{i(k_x x+k_y y)},\quad k_x=\frac{2\pi n_x}{L},\quad k_y=\frac{2\pi n_y}{L}$$

と求められる (A は規格化定数)。ここで n_x，n_y は整数である。エネルギーが E から $E+dE$ の微小区間にあるエネルギー固有状態の数を $D(E)dE$ とする。ただし，L は十分大きいとし，$D(E)$ は E の連続関数と考えてよいものとする。電子のスピンの自由度を考慮した場合，$E\geq 0$ で $D(E)$ はエネルギー E によらず

$$D(E)=\frac{L^2 m}{\pi\hbar^2}$$

となることを示せ。

次に，相互作用のない多数の電子からなる系のグランドカノニカル分布を考える。温度 T，化学ポテンシャル μ の電子系の粒子数，及び，全エネルギーの期待値はそれぞれ

$$\bar{N}=\int_0^\infty dE\,D(E)f(E),\quad \bar{E}=\int_0^\infty dE\,D(E)f(E)E$$

で与えられる。ここで

$$f(E)=\left[\exp\left(\frac{E-\mu}{k_{\mathrm{B}}T}\right)+1\right]^{-1}$$

はフェルミ分布関数である (k_{B} はボルツマン定数)。また，以下の設問では設問 1 で示した $D(E)$ の表式を用いてよい。

2. 温度 $T=0$ における化学ポテンシャルの値を μ_0 とする。μ_0 を系の粒子数の期待値 $\bar{N}$ の関数として求めよ。また $T=0$ における系の全エネルギーの期待値 $\bar{E}$ を $\bar{N}$ の関数として求めよ。

次に温度Tが有限になったときの系の振る舞いを考える。ただし，以下の設問ではTはμに比べて十分小さいとし，

$$\int_0^{\mu} dE\, D(E)(1-f(E)) \simeq \int_{-\infty}^{\mu} dE\, D(E)(1-f(E))$$

と近似してよいものとする。

3. $(E+E')/2=\mu$を満たすE，E'に対して，$f(E')=1-f(E)$を示せ。

4. 化学ポテンシャルμを固定して温度Tを変化させたとき，粒子数の期待値$\bar{N}$は一定であることを示せ。

5. $g(E)=D(E)f(E)$のグラフを描き，そのグラフを用いて系の熱容量$C=dE/dT$が温度Tに比例することを定性的に説明せよ。

6. 系の熱容量$C=dE/dT$を求めよ。必要があれば，以下の積分公式を用いて良い。

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^{ax}+1} = \frac{\pi^2}{12a^2} \quad (a>0)$$

第3問
誘電体中を伝播する電磁波を考える。マクスウェル方程式は，電場ベクトル $\vec{E}$，電束密度ベクトル $\vec{D}$，磁場ベクトル $\vec{H}$，磁束密度ベクトル $\vec{B}$，誘電率 ϵ，透磁率 μ を用いて

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\
\vec{B} &= \mu \vec{H}
\end{aligned}
$$

と表されるとする。ここで t は時刻、∇ は空間座標 $\vec{r}$ に関するベクトル微分演算子である。以下の設問に答えよ。なお設問 1〜3 では，ϵ と μ は位置と時刻によらない正の定数とする。

1. マクスウェル方程式から，電場ベクトル $\vec{E}$ が以下の波動方程式を満たすことを示せ。

$$\left(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0$$

   ただし，任意のベクトル場 $\vec{A}$ に対して $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ が成り立つことを用いても良い。

2. 平面波 $\vec{E} = \vec{a}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ ($\vec{a}$, $\vec{k}$ は実定数ベクトル，ω は正の定数) が，設問 1 に与えられた波動方程式の解となっていることを示せ。またそのとき，$\vec{k}$ と ω の満たす関係式を求めよ。

3. 設問 2 の解は横波であること ($\vec{k} \cdot \vec{a} = 0$) を示せ。また，対応する磁束密度ベクトル $\vec{B} = \vec{b}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ の実定数ベクトル $\vec{b}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{k}$ を用いて表せ。

設問 2，3 で得られた $\vec{E}$ と $\vec{B}$ の組は、直線偏光した電磁波を表す。

次に平面で接している二つの誘電体を考える。境界を xy 平面に取り，誘電率は $z < 0$ では ϵ_1，$z > 0$ では ϵ_2 であるとする。透磁率はどちらの誘電体も同じ μ であるとする (ϵ_1，ϵ_2，μ は正の定数)。角周波数 ω の直線偏光した電磁波が，$z < 0$ の側から境界面に対して入射角 θ_1 で入射し，反射・屈折する状況を考える (図 1)。入射波，反射波，透過波の電場ベクトルを，それぞれ

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{a}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\
\vec{R} &= \vec{a}'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \\
\vec{T} &= \vec{a}''\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)}
\end{aligned}
$$

と書くことにする。また，対応する磁束密度ベクトルの係数はそれぞれ，$\vec{b}$，$\vec{b}'$，$\vec{b}''$ とする。以下では，入射波の波数ベクトル $\vec{k}$ が xz 平面内にあるとし，波数ベクトルの成分について，$k_y = k'_y = k''_y = 0$，$k_x = k'_x$，$k_z = -k'_z$ が成り立つとせよ。

4. $z=0$ での電場，磁場，磁束密度に関する境界条件をマクスウェル方程式から導き，$\vec{a}$, $\vec{a}'$，$\vec{a}''$，$\vec{b}$，$\vec{b}'$，$\vec{b}''$ が以下の式を満たすことを示せ。

$$a_y + a'_y = a''_y$$
$$b_x + b'_x = b''_x$$
$$b_z + b'_z = b''_z$$

5. $z=0$ で x，y の値によらず $E_x + R_x = T_x$ が成り立つという条件を利用し，k''_x と k''_z を k_x と θ_2 を用いて表せ。

6. 入射波の電場ベクトルが xz 平面に垂直 ($\vec{a} = (0, a_y, 0)$) である場合，$|\vec{a}'|$，$|\vec{a}''|$ を求めよ。

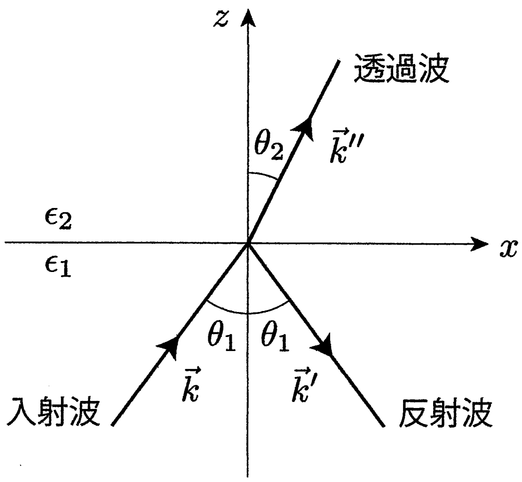

図 1: 入射波，反射波，透過波の関係