受験番号	
氏　　名	

平成３０年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成３０年１月２９日（月）９時３０分～１１時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入してください。
3. 問題は全部で３問あります。
   第１－３問をそれぞれ別の答案用紙(計３枚)に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。
4. 答案用紙を計算用紙として使用してはいけません。計算用紙は別に配付します。

第1問

1次元空間を質量 m の粒子が運動する系を量子力学的に取り扱う。空間座標 x の関数としてポテンシャルエネルギーを $V(x)$ で表す。具体的には

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ V_0 & (0 \le x \le a), \\ 0 & (a < x) \end{cases} \tag{1}$$

であるとする。a も V_0 も正の値とする。この系の波動関数 $\Psi(x,t)$ が従うシュレディンガー方程式が

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \tag{2}$$

であることを用いて以下の問いに答えよ。ただし，ここで $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

1. シュレディンガー方程式の解として $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ の形の波動関数を考える。ただし，E は時間 t にも空間座標 x にも依存しない定数とする。$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ を方程式 (2) に代入し，$\psi(x)$ が従う t を含まない方程式を導け。

2. 以下では $0 < E < V_0$ の範囲の解を取り扱うことにする。$x < 0$ および $a < x$ の区間では $\psi(x) \propto e^{ikx}$ や $\psi(x) \propto e^{-ikx}$ が解になっている。このとき，E と k $(k > 0)$ の間の関係を求めよ。

3. $0 \le x \le a$ の区間では, $\psi(x) \propto e^{-\kappa x}$ や $\psi(x) \propto e^{\kappa x}$ が解になっている。このとき，E と κ $(\kappa > 0)$ の間の関係を求めよ。

4. 3つの区間 $x < 0$, $0 \le x \le a$, $a < x$ をつなげて全体の波動関数 $\psi(x)$ を求める。線形結合係数 A, A', B, B', C を用いて，

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + A'e^{-ikx} & (x < 0), \\ Be^{-\kappa x} + B'e^{\kappa x} & (0 \le x \le a), \\ Ce^{ikx} & (a < x) \end{cases} \tag{3}$$

としよう。ここで，$x < 0$ の領域には入射波と反射波，$a < x$ の領域では透過波のみがある状況を考えている。

   (i) $x = a$ において波動関数 $\psi(x)$ も，その一階微分も連続という条件を課して，B, B' を C, k, κ, a を用いて表せ。

   (ii) $x = 0$ においても同様の条件を課して，A, A' を B, B', k, κ を用いて表せ。

   (iii) (i) と (ii) の結果を組み合わせて，透過率 $|C/A|^2$ を k, κ, a を用いて表せ。

5. 設問1–4において aV_0 を一定に保ちつつ，$a \to 0$, $V_0 \to +\infty$ とする極限を考える。この極限での透過率 $|C/A|^2$ を m, E, (aV_0), $\hbar$ を用いて表せ。

第 2 問

独立な N 個の二準位系からなる系を考える。二準位系は 2 つの状態 A, B をとり，状態 A, B のエネルギーはそれぞれ $-\varepsilon, \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ とする。

1. この系が温度 T で熱平衡状態にある場合，以下の問いに答えよ。

   (i) この系の内部エネルギー $E(T)$ および熱容量 $C(T)$ を求めよ。

   (ii) この系のエントロピー $S(T)$ を求めよ。このエントロピーの $T=0$ での値 $S(0)$ と，高温極限での値 $S(\infty)$ を求め，その結果を状態数とエントロピーの関係を与えるボルツマンの原理から説明せよ。

   (iii) 状態 A にある粒子数が $N_{\rm A}$ である確率 $P(N_{\rm A})$ $(0 \leq N_{\rm A} \leq N)$ を求めよ。また $N_{\rm A}$ の期待値 $\langle N_{\rm A} \rangle$ と分散 $\langle N_{\rm A}^2 \rangle - \langle N_{\rm A} \rangle^2$ を求めよ。

2. 次に，状態 A, B の間に量子力学的遷移がある場合を考える。その場合の各二準位系のハミルトニアンは，遷移の強さを Γ として

$$\mathcal{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   で与えられるものとする。

   (i) 各二準位系の固有エネルギー，固有状態を求めよ。

   (ii) この系が温度 T で熱平衡状態にある場合の内部エネルギーを求めよ。

   (iii) この系が温度 T で熱平衡状態にある場合に，状態 A にある粒子数 $N_{\rm A}$ の期待値 $\langle N_{\rm A} \rangle$ を求めよ。

第 3 問

1. 図 1 のように，位置 P から位置 Q への経路 1 (Γ_1) を考える。電場を

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x},t) - \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{1}$$

とおき，次の線積分

$$-\int_P^Q \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x} \tag{2}$$

を電位 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ およびベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ を用いて表せ。次に，ϕ と $\boldsymbol{A}$ が時間によらない場合，(2) 式の線積分は経路によらないことを示せ。

2. 次に，位置 P から位置 Q への別の経路 2 (Γ_2) を考え，経路 1 を通って P から Q を経由して経路 2 で P に戻る閉曲線 $C \equiv \Gamma_1 - \Gamma_2$ を考える。電場 $\boldsymbol{E}$ を経路 C に関して周回積分することで，Faraday の電磁誘導の法則を導け。

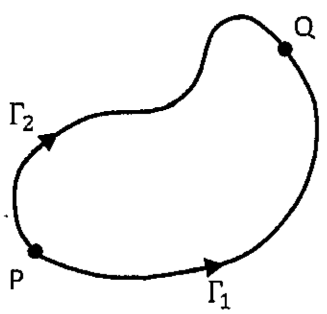

図 1: 2 つの経路

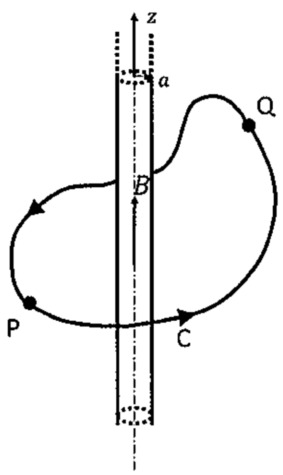

図 2: 円筒内磁場と閉曲線

3. 図 2 のように無限に長い半径 a の円筒領域内に z 軸方向を向き，一様で定常な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が存在するものとする。このとき，円筒の内外におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を求めよ。なお対称性から，$\boldsymbol{A}$ は軸対称な場になることを利用してよい。また，無限遠方では $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ を満たすものとする。ただし，円筒の外では磁場はないものとする。

4. 図 2 のように閉曲線を貫く円筒領域内に磁場があるとき，円筒の外部に磁場は存在しないにもかかわらず，電磁誘導の法則からは，円筒内の磁場を 0 にするとその変化が円筒から離れた閉曲線上の電場としてただちに現れるように見える。これは一見，因果律に反するように見えるが，どのように説明できるか答えよ。

5. 図3のように，半径 a の無限に長い円筒内に z 軸に沿って一様な磁束密度 $\boldsymbol{B_0}$ があり，円筒の外では磁場はないものとする。また，半径 R の円周上に電荷 q を持った帯電球が置かれている。帯電球は円環に固定され，円環は z 軸の周りを自由に回転できるものとする。磁場を減少させて0にしたとき，Faradayの電磁誘導の法則により周囲には電場が生じ，帯電球は中心軸の周りに回転を始める。その前後での帯電球1個あたりの軸周りの角運動量の変化を $|\boldsymbol{B_0}|, q, a$ を用いて表せ。また，設問3で求めたベクトルポテンシャルを用いて表せ。ただし，帯電球の大きさは無視できるものとする。

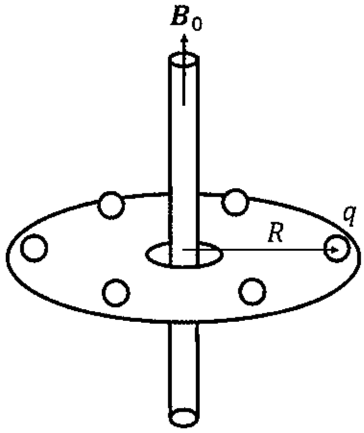

図 3: 円筒内磁場と帯電球