受験番号	
氏　　名	

平成２８年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２８年２月１日（月）　９時３０分～１１時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入してください。
3. 問題は全部で３問あります。
   第１－３問をそれぞれ別の答案用紙（計３枚）に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。
4. 答案用紙を計算用紙として使用してはいけません。計算用紙は別に配付します。

第1問

時間依存する磁場のもとでのスピン 1/2 の系を考えよう。系のハミルトニアンは,

$$H(t) = -\mu \vec{B}(t) \cdot \vec{\sigma} \tag{1}$$

で与えられるものとする。ここで, μ は正の定数で, 磁束密度は

$$\vec{B}(t) = B_0(\sin\theta(t)\cos\phi(t), \sin\theta(t)\sin\phi(t), \cos\theta(t)) \tag{2}$$

で与えられ, 大きさ B_0 は一定であるが, 極座標 $\theta(t)$, $\phi(t)$ で指定される向きが時刻 t により変化する。また, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ はパウリ行列で

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる。

1. 時刻 $t = t_0$ において磁場が $\vec{B}(t_0) = (B_0, 0, 0)$ および $\vec{B}(t_0) = (0, B_0, 0)$ で与えられるそれぞれの場合について, $H(t_0)$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

2. $\vec{B}(t)$ が上式 (2) のように一般的に与えられる場合, ある時刻 $t = t_0$ における $H(t_0)$ の固有値は $\pm\mu B_0$ で与えられる。固有値 $+\mu B_0$ の規格化された固有状態 $|\psi_+(t_0)\rangle$ および固有値 $-\mu B_0$ の規格化された固有状態 $|\psi_-(t_0)\rangle$ を求めよ。ただし, 固有状態は $\theta = 0$ において ϕ に依存しないように取れ。

3. 時刻 t における系の波動関数を $|\Psi(t)\rangle$ と書く。 初期時刻 $t = t_0$ において, $|\Psi(t_0)\rangle = |\psi_-(t_0)\rangle$ であったとする。ここで, $\vec{B}(t)$ を充分ゆっくりと $\vec{B}(t_0)$ から変化させると, 系の状態 $|\Psi(t)\rangle$ は位相因子を除いて $|\psi_-(t)\rangle$ で与えられるようにできる。そのためには, どの程度ゆっくり変化させれば良いか, 簡単に説明せよ。

まず, $\theta(t) = \theta_0$ が定数で, $\phi(t) = \omega t$ である場合を考える (図 1)。ただし, $\omega > 0$ とし、磁場の向きが一周するのにかかる時間を $T = 2\pi/\omega$ とする。

4. ω が非常に小さいとすると, $|\Psi(t)\rangle \simeq e^{-ia(t)}|\psi_-(t)\rangle$ と近似してよい。$|\Psi(t)\rangle$ の満たすシュレーディンガー方程式を書き, $\langle\psi_-(t)|$ を左から掛けることによって, $a(t)$ の満たす方程式を導け。また, 初期条件を $t = 0$ において $|\Psi(0)\rangle = |\psi_-(0)\rangle$ として, それを解け。

5. 位相 $a(t)$ からダイナミカル位相と呼ばれる項 $-\mu B_0 t/\hbar$ を取り除いた

$$\underline{a}(t) = a(t) + \mu B_0 t/\hbar \tag{4}$$

は, トポロジカル位相もしくは Berry 位相と呼ばれる。ω が非常に小さいとして, $\underline{a}(T)$ を求めよ。

もっと一般に, 磁場の向きが単位球面上の極座標で与えられた曲線上 $(\theta(t), \phi(t))$ を非常にゆっくりとなめらかに変化して, $t = T$ で $t = 0$ における向きに戻ったとする (図 2)。

6. 小問 4 および 5 と同様にして, $\underline{a}(T)$ を求めよ。また, その結果が, 曲線で囲まれた立体角を 2 で割ったものであることを示せ。

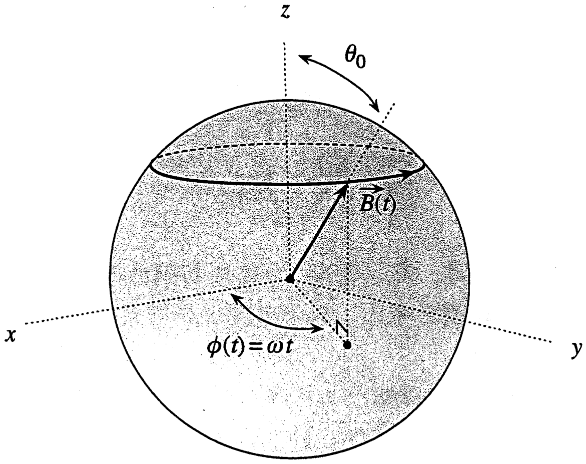

図 1:

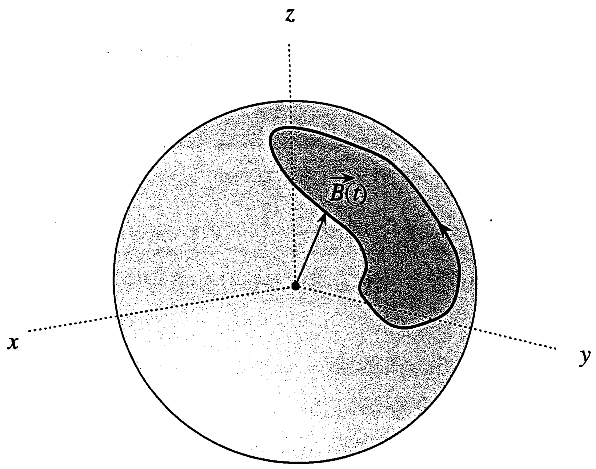

図 2:

第2問

一辺が L の立方体の容器（体積 $V = L^3$）に閉じ込められた, 互いに区別できない N 個の質量 m の粒子からなる理想気体が温度 T の熱平衡状態にある場合を考える。ボルツマン定数は k_{B} とする。理想気体のハミルトニアンは，i 番目の粒子の位置を $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$，運動量を $\boldsymbol{p}_i = (p_i^x, p_i^y, p_i^z)$ として

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \boldsymbol{p}_i^2 \tag{1}$$

で与えられるものとする。ここでは，粒子密度 N/V を有限に保ちながら，N は十分大きい場合を考える。運動は古典力学の範囲で考え，以下の問いに答えよ。

1. 系が温度 T の熱浴と接し，平衡状態にある場合を考え, カノニカル集団の方法で内部エネルギー E，圧力 P を，体積 V，温度 T，粒子数 N の関数として求めよ。ただし，ガウス積分
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (a > 0) \tag{2}$$
を用いてよい。

2. エントロピー S を，体積 V，温度 T，粒子数 N の関数として求めよ。また，それが示量性であること，つまり N に比例することを示せ。ただし，大きな N の階乗に関する次の関係を用いてよい。
$$N! \simeq N^N e^{-N} \tag{3}$$

次に，互いに区別できない N 個の質量 m の粒子からなる理想気体を閉じ込めた，外部との熱のやりとりの有無，および体積を制御できる系における過程を考える。

3. 温度 T_1，体積 V_1 の状態から準静断熱的，つまり, エントロピーを一定にして体積を V_1 から V_2 に変化させた時の温度変化を求めよ。また，この過程で系が外界にした仕事はいくらか。この過程の終状態での温度を T_2，圧力を P_2 とする。

4. 温度 T_1，体積 V_1 の状態から温度を一定 (T_1) に保ったまま体積を V_1 から V_3 に変化させた時の圧力を P_3 とする。P_3 を求めよ。また，この過程で系が外界にした仕事はいくらか。

5. 上記の等エントロピー過程 (断熱過程）と等温過程を用いて，温度が T_1，T_2 の 2 つの熱源の間に熱機関を考え，その仕事効率 η を求めよ。ただし，$T_1 > T_2$ とする。

第3問

図1のように質量mの小球A, Bが，質量の無視できる二つのバネで地表から鉛直上方に取りつけられている系を考える。運動は鉛直方向にのみ起こり，摩擦は働かないものとする。それぞれのバネの自然長はℓ，バネ定数はkである。地表面を原点として鉛直上方にx軸をとり，各小球の座標を$x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}$として以下の問いに答えよ。重力加速度の大きさを$g$とする。

1. この系のラグランジアンを記せ。

2. 各小球の運動方程式を求めよ。また，それらの平衡点の座標$x_{\mathrm{A}}^{(eq)}, x_{\mathrm{B}}^{(eq)}$を求めよ。

3. 各小球の座標の平衡点からのズレ$X_{\mathrm{A}} \equiv x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{A}}^{(eq)}$, $X_{\mathrm{B}} \equiv x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{B}}^{(eq)}$の従う運動方程式を書き下し，この系の固有振動数を求めよ。$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$を用いて表すこと。

4. 前問で求めた固有振動数をω_+, ω_- $(\omega_+ > \omega_- > 0)$とする。これらを用いて$X_{\mathrm{A}}(t), X_{\mathrm{B}}(t)$に関する一般解を求めよ。

以上の結果を用いて，機械振動が地表に伝わるのを抑制する防振系のモデルを考えてみよう。小球Bは運転時に振動を発生する機械であったとし，その振動は，小球Bに外力$F \sin \Omega t$が加わったものとしてモデル化できるものとする。F, Ωは定数である。

5. このとき，$X_{\mathrm{A}}(t), X_{\mathrm{B}}(t)$の一般解を求めよ。

6. はじめ小球A, Bともにそれぞれの釣り合いの位置で静止した状態にあったとし，$t = 0$に機械を始動する。$\Omega \gg \omega_0$とすると，機械の振動によって地表に働く力には，角振動数Ωの高周波の成分と，角振動数ω_0程度の低周波の成分がある。それぞれの成分の大きさがω_0/Ωの何乗に比例するかを求めよ。

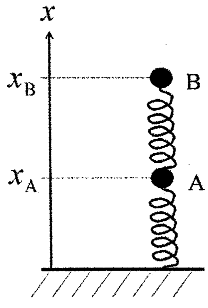

図 1: バネと小球からなる系