受験番号	
氏　　名	

平成２８年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２７年８月２４日（月）　９時３０分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(数学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(数学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

1. 二つの2次正方行列

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{1}$$

から，以下のような規則で行列 M_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ を生成する。まず，$M_0 = B$, $M_1 = A$ と定義し，次に一般の $n \geq 2$ については

$$M_n = M_{n-1} M_{n-2} \tag{2}$$

という漸化式により行列 M_n を定義する。このとき，以下の設問に答えよ。

(i) 一般の n について，M_n が次の性質を満たすことを示せ。ただし，E は2次の単位行列である。

(a) $\det M_n = 1$,　(b) $\mathrm{Tr} M_n = \mathrm{Tr}\,(M_n)^{-1}$,　(c) $M_n + (M_n)^{-1} = (\mathrm{Tr}\, M_n) E$

以下では，$x_n = \mathrm{Tr}\, M_n$ が満たす性質を調べる。

(ii) $M_{n+1} + (M_{n-2})^{-1}$ を M_n と M_{n-1} で表せ。また，それを用いて，x_n が漸化式

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1} - x_{n-2} \tag{3}$$

を満たすことを示せ。

(iii) (3) の漸化式を用いて，x_n, x_{n+1}, x_{n+2} から構成される

$$I_n = x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2 - x_{n+2}\, x_{n+1}\, x_n \tag{4}$$

が n に依存しない量であることを証明せよ。また，その値を求めよ。

2. 次の N 次正方行列 C を考える。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & \text{\huge O} \\ b_1 & 0 & b_2 & & \\ & b_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ \text{\huge O} & & & b_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

すなわち，$C_{i,i+1} = C_{i+1,i} = b_i$ $(i = 1, 2, ..., N-1)$ であり，これら以外の成分はすべて0であるものとする。また，すべての i について，$b_i > 0$ であるとする。このとき，以下の設問に答えよ。

(i) $N = 3$ の場合について，行列 C の固有値をすべて求めよ。

(ii) 列ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)^{\mathrm{T}}$ が，行列 C の固有ベクトルであるとき，$v_1 \neq 0$ であることを証明せよ。

(iii) 行列 C の固有値がすべて互いに異なることを証明せよ。(設問 (ii) の結果を用いてもよい。)

第２問

1. $y(x,t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda^2 y = 0 \tag{1}$$

を考える。（λ は正の定数とする。）

(i) 初期条件，$y(x,0) = \cos kx$，$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ の下で，$y(x,t)$ を求めよ。（k は正の定数とする。）ただし，この条件のとき，解が $y(x,t) = f(t)g(x)$ と書けることを用いてもよい。

(ii) 設問 (i) で得られた解を，x 軸の正の方向に進む波と負の方向に進む波との２つに分解せよ。

2. 次に

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\lambda^2(y^3 - y) = 0 \tag{2}$$

を考える。（λ は正の定数とする。）

(i) まず，t に依存しない解 $y(x,t) = u(x)$ を考える。$u(x)$ に対する微分方程式

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + 2\lambda^2(u^3 - u) = 0 \tag{3}$$

の両辺に $\frac{du}{dx}$ をかけて，その積分を求めることにより

$$\frac{du}{dx} = \pm\lambda\sqrt{u^4 - 2u^2 + A} \tag{4}$$

が成立することを示せ。ここで，A は積分定数である。

(ii) 設問 (i) の $u(x)$ が満たす境界条件を

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x) = -1 \tag{5}$$

とする。このとき A の値を求めよ。

(iii) 設問 (ii) の境界条件の下で $u(x)$ を求めよ。ただし $|u(x)| \leq 1, u(0) = 0$ としてよい。

(iv) 次に，(3) を満たす $u(x)$ を用いて $y(x,t) = u(x) + z(x,t)$ とおき，z が満たす偏微分方程式を求めよ。ただし z は微小であるとして，z^2, z^3 に比例する項は無視してよい。

(v) (3) を使って，設問 (iv) で求めた z の偏微分方程式の１つの解が

$$z_0(x,t) = \mathrm{e}^{i\omega t}\,\frac{du}{dx} \tag{6}$$

で与えられることを示せ。また，そのときの ω の値を求めよ。