受験番号	
氏　　名	

平成３１年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻博士課程入学試験問題

物　　理　　学

平成３０年８月２０日（月）　１３時００分～１６時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で３問ある。３問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計３枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

ハミルトニアン

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

を持つ1次元調和振動子の量子力学系を考える。ここで m と ω は振動子の質量と固有振動数，x と p は座標と運動量の演算子である。プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とするとき，x と p は交換関係 $[x,p] = i\hbar$ を満たす。このような1次元束縛ポテンシャルを持つ系のハミルトニアンが対角化可能で縮退を持たないことを既知として，以下の設問に答えよ。

1. 演算子 a, $a^\dagger$, N を次のように定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad N = a^\dagger a.$$

   これらの交換子 $[a, a^\dagger]$, $[N, a]$, $[N, a^\dagger]$ を計算せよ。また，H_0 と N の間には $H_0 = \hbar\omega(\alpha N + \beta)$ という関係が成り立つ。α と β の値を書け。

2. 上記の演算子 $N = a^\dagger a$ の固有値が (i) 非負であること，(ii) 整数であること，を示せ。

3. エネルギー準位の番号をエネルギーの低い方から順に $n = 0, 1, 2, \cdots$ とする。$n = 0$ は基底状態に対応する。n 番目の準位のエネルギーを求めよ。また，n 番目の準位に対応する規格化された固有状態を $|n\rangle$ とするとき，$n \geq 1$ に対する $|n\rangle$ を $a^\dagger$ と $|0\rangle$ を用いて表せ。

以下では H_0 にポテンシャル $V = \lambda x^4$（λ は正の定数）を加えたハミルトニアン

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x^4$$

を持つ系を考える。

4. V を摂動と考え，エネルギー固有値の摂動展開を求めたい。

   (i) 準備として一般の V に適用できる表式を得ておこう。n 番目の準位のエネルギーの摂動展開を $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \cdots$ とする。1次と2次の摂動 $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$ を，H_0 の固有値 $E_k^{(0)} (k = 0, 1, 2, \cdots)$ および H_0 の規格化された固有状態からなる基底 $|k\rangle$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$) に関する V の行列要素 V_{kl} ($k, l = 0, 1, 2, \cdots$) を用いて表せ。ただし行列要素は $V|l\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle V_{kl}$ によって定義される。

   (ii) $V = \lambda x^4$ の場合に行列要素 V_{k0} を計算し，基底状態のエネルギーを λ に関する摂動展開の2次まで求めよ。

5. 次に，V が摂動とはみなすことができない場合を考えよう。高いエネルギーを持つ固有状態は準古典的に扱うことができる。準位番号 n が十分大きい極限において，エネルギー固有値 E_n が n の何乗に比例するか答えよ。

第 2 問

スピンを持つ原子が図 1 のように 1 次元的に並んで相互作用している古典的な系を考える。これらの原子に，左端から順に $i = 1, 2, \cdots, L$ と番号を付け，i 番目の原子のスピンの状態を表す変数を $\mathbf{S}_i$ とする。ただし，$L \geq 2$ とし，$\mathbf{S}_i$ は，$\hat{x} = (1, 0, 0)$ か $\hat{y} = (0, 1, 0)$ のいずれかをとるものとする (図 1)。この系の各状態は，スピン配置 $(\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_L)$ で指定され，そのエネルギーは，

$$E(\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_L) = -J \sum_{i=1}^{L-1} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \tag{1}$$

で与えられる。ここで，$J > 0$ である。この系が，温度 T の熱平衡状態にあるとする。ここで，ボルツマン定数 k_{B} を用いて逆温度を $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ と定義し，系の分配関数を $Z_L(\beta)$ とする。以下の設問に答えよ。

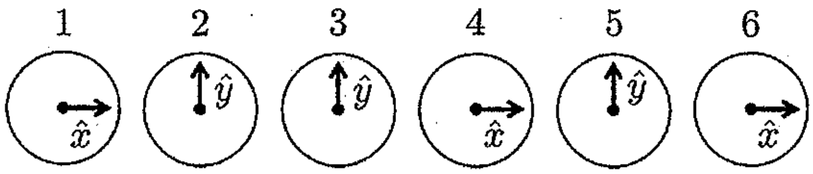

図 1: $L = 6$ の場合のスピン配置の例。

1. $L = 2$ の場合に，可能なスピン配置をすべて列挙し，それぞれのエネルギーを求めよ。また，その結果をもとに，分配関数 $Z_2(\beta)$ を求めよ。

2. $L = 3$ の場合に，可能なスピン配置をすべて列挙し，それぞれのエネルギーを求めよ。また，その結果をもとに，分配関数 $Z_3(\beta)$ を求めよ。

3. 一般の L について，$Z_L(\beta)$ を求めよ。ただし，$L \geq 3$ のとき，$Z_L(\beta)$ は $Z_{L-1}(\beta)$ を用いて表すことができる。その関係式を用いてよい。

4. 一般の L について，系の自由エネルギー $F_L(\beta)$ を求めよ。

5. L が十分大きい極限での，スピン 1 個あたりの内部エネルギー $u(\beta)$ を求めよ。また，高温極限および低温極限での $u(\beta)$ の値とスピン配置の出現確率との関係について説明せよ。

次に，原子数 L の系の左端のスピン $\mathbf{S}_1$ と右端のスピン $\mathbf{S}_L$ の内積の期待値 $\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle$ について考える。

6. 原子数 L の系において，$\mathbf{S}_1 = \hat{a}$ かつ $\mathbf{S}_L = \hat{b}$ ($\hat{a}$, $\hat{b}$ は，$\hat{x}$, $\hat{y}$ のいずれか) である確率を $P_L(\hat{a}, \hat{b})$ とする。$L \geq 3$ のとき，$P_L(\hat{a}, \hat{b})$ と $P_{L-1}(\hat{a}, \hat{b})$ の間には，以下の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} P_L(\hat{x}, \hat{x}) & P_L(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_L(\hat{y}, \hat{x}) & P_L(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{L-1}(\hat{x}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_{L-1}(\hat{y}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(\hat{x}, \hat{x}) & Q(\hat{x}, \hat{y}) \\ Q(\hat{y}, \hat{x}) & Q(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

このとき，4 つの行列要素 $Q(\hat{a}, \hat{b})$ を β, J を用いて表せ。

7. $\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle$ を，β, J, L を用いて表せ。また，$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle$ は，L に依存しない定数 A, B, ξ を用いて

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle = A + B \exp\left(-\frac{L-1}{\xi}\right) \tag{3}$$

と書ける。高温極限および低温極限における ξ を，それぞれ β, J を用いて表せ。

第3問

質量m_1，m_2をもつ二つの質点が互いの重力によって束縛運動している系を考える。それらの位置ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$とし，相対位置ベクトルを$\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$と定義する。軌道面上での$\boldsymbol{r}$の2次元極座標表示$(r,\varphi)$を用いると，系のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{G\mu M}{r} \tag{1}$$

となる。ここで，Gはニュートンの重力定数である。また，Mとμは以下で定義される。

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

この系に関する以下の設問に答えよ。なお，設問5と6は，それ以外の設問と独立に解くことができる。

1. 式(1)のラグランジアンを用いて，rとφに対する運動方程式を求めよ。

2. この系のエネルギーEの表式，およびφに共役な運動量Jの表式を求めよ。

3. EとJが運動の定数であることを示せ。

一般相対論によれば，この系から重力波が放射されることで，Eは保存せず徐々に減少する。以下では，重力波の放射の影響を考慮した場合の系の運動を，一般相対論ではなくニュートン力学を用いて近似的に取り扱う。さらに，任意の時刻tにおける軌道が半径$a = a(t)$の円軌道で近似できる場合を考え，その時刻でのエネルギー$E = E(t)$が

$$E = -\frac{G\mu M}{2a} \tag{3}$$

と書けることを用いてよい。また重力波の放射に伴うμとMの変化は無視できるものとする。

4. 半径aの円軌道の場合，この系からの重力波による単位時間あたりのエネルギー放射率は，cを光速として，

$$L_{\mathrm{GW}} = \frac{32G^4}{5c^5}\frac{\mu^2 M^3}{a^5} \tag{4}$$

で与えられる。したがって，系の運動をニュートン力学で近似した場合には

$$\frac{dE}{dt} = -L_{\mathrm{GW}} \tag{5}$$

が成り立つ。式(5)をaに対する微分方程式に書き直せ。

5. ケプラーの法則を用いれば，設問4の結果は公転周期Pに対する次の微分方程式

$$\frac{dP}{dt} = -A\left(\frac{P_{\mathrm{c}}}{P}\right)^{5/3} \tag{6}$$

に書き換えられる。ここで，Aは無次元の数係数，P_{c}は時間の次元をもつ定数で，それらは設問6で具体的に計算する。ここでは，式(6)を解いて，初期条件として公転周期P_0をもつ2質点系が，合体する(すなわち$P = 0$)までの時間τ_{GW}を，A, P_{c}およびP_0を用いて表せ。

6．ケプラーの方程式

$$GMP^2 = 4\pi^2 a^3 \tag{7}$$

を用いて式 (6) を導き，$P_c = G\mu^\alpha M^\beta c^\gamma$ とした時のべき指数 α, β, γ の値と A の表式を求めよ。

7．2015 年に，連星ブラックホール GW150914 からの重力波信号が直接検出された。地上で重力波の信号が検出され始めた時点での連星ブラックホールの公転周期は $P_0 \approx 0.06$ sec であった。この連星ブラックホールは，それから $\tau_{\rm GW} \approx 0.15$ sec 後に，重力波放射によって合体した。簡単のために，この連星は等質量 m の 2 つのブラックホールからなり，また合体直前までニュートン力学近似が正しいものと仮定する。設問 5 と 6 の結果を利用することで，m が太陽質量 $M_\odot$ の何倍であるかを概算せよ。A の近似値を 2500 とし，必要であれば $2GM_\odot/c^3 \approx 10^{-5}$ sec，$6^{3/5} \approx 2.9$，$2^{1/5} \approx 1.1$ を用いてよい。

8．連星ブラックホールの公転周期が P_0 のときの公転半径を a_0 とする。それ以降，重力波放射に伴い a は徐々に減少するが，やがてある長さ $a_{\rm min}$ 以下になると，上述のニュートン力学的な 2 質点の運動という描像が破綻する。これは物理的には，ブラックホールはその質量に対応した特徴的な長さスケールをもち，$a = 0$ になる以前に 2 つのブラックホールが実効的に合体するためである。GW150914 の場合，合体までに放射される重力波によって，設問 7 で得られた質量 m の約一割に相当するエネルギーが系から失われたと考えられている。このとき，$a_{\rm min}$ と m の関係式を導け。ただし簡単のために，$a_0 \gg a_{\rm min}$ と近似できるものとし，a が a_0 から $a_{\rm min}$ になるまでは上述のニュートン力学近似が正しく，かつ a が $a_{\rm min}$ になった後は重力波が放射されないものと仮定せよ。この設問においても，式 (3) における μ と M の時間変化率は，a の時間変化率に比べて小さく無視できるものとする。