受験番号	
氏　　名	

令和２年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻博士課程入学試験問題

物　　理　　学

令和元年８月１９日（月）　１３時００分～１６時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で３問ある。３問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計３枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(物理学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第 1 問

量子力学的二状態系を考えよう。この場合，観測量は 2×2 のエルミート行列で表される演算子に対応する。以下では次の行列表示をもつ観測量

$$\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma(\theta) = (\cos\theta)\sigma_z + (\sin\theta)\sigma_x \tag{1}$$

を考え，状態ベクトルを

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \tag{2}$$

を用いて表す。

1. 状態 $|\uparrow\rangle$ において観測量 σ_z を測定した。測定結果が取りうる値 s_z，およびその期待値を求めよ。

2. 状態 $|\uparrow\rangle$ において観測量 σ_x を測定した。測定結果が取りうる値 s_x，およびその期待値を求めよ。

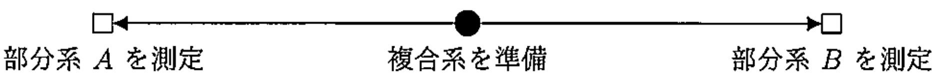
3. 状態 $|\uparrow\rangle$ において観測量 $\sigma(\theta)$ を測定した。測定結果が取りうる値 s_θ，およびその期待値を求めよ。

上記の二状態系 A, B からなる複合系を考える。その状態は四状態

$$|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B, \quad |\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B, \quad |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B, \quad |\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B \tag{3}$$

の線形結合で書ける。そのような複合系を準備したのち，二状態系 A, B をそれぞれ別の場所で測定する。模式図は以下を参照せよ：

模式図：



この設定の下で，次の実験を考える。

実験： 状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\Big) \tag{4}$$

の複合系を毎回新たに準備し，部分系 A において観測量 σ_z^A, σ_x^A, $\sigma^A(\theta)$ のいずれか，部分系 B において観測量 σ_z^B, σ_x^B, $\sigma^B(\varphi)$ のいずれかを測定する。

この実験を，何度も繰り返すことを考えよう。

(次頁につづく)

4. 毎回，部分系 A で σ_z^A, 部分系 B で σ_z^B を測定する。
取りうる測定結果の組 (s_z^A, s_z^B) を述べよ。また，積 $s_z^A s_z^B$ の期待値を求めよ。

5. 毎回，部分系 A で σ_x^A, 部分系 B で σ_x^B を測定する。
取りうる測定結果の組 (s_x^A, s_x^B) を述べよ。また，積 $s_x^A s_x^B$ の期待値を求めよ。

6. 毎回，部分系 A で $\sigma^A(\theta)$, 部分系 B で $\sigma^B(\theta)$ を測定する。
この場合，測定結果の組 (s_θ^A, s_θ^B) は $s_\theta^A = -s_\theta^B = \pm 1$ を満たすことを示せ。

7. 毎回，部分系 A で $\sigma^A(\theta)$, 部分系 B で $\sigma^B(\varphi)$ を測定する。
取りうる測定結果の組 $(s_\theta^A, s_\varphi^B)$ を述べよ。また，積 $s_\theta^A s_\varphi^B$ の期待値を求めよ。

8. 各回，部分系 A で測定する観測量 $\sigma^A(\theta)$ を $\sigma^A(0°)$, $\sigma^A(120°)$, $\sigma^A(240°)$ からそれぞれ 1/3 の確率で測定者が選択することにし，また，部分系 B でも，測定する観測量 $\sigma^B(\varphi)$ を $\sigma^B(0°)$, $\sigma^B(120°)$, $\sigma^B(240°)$ からそれぞれ 1/3 の確率で測定者が選択することにする。測定結果の組 (s^A, s^B) の取りうる値を述べよ。また，積 $s^A s^B$ の期待値を求め，それが 0 になることを示せ。

これまでは量子力学を用いて考察を行ったが，そのようにして得られた設問 8 の結論は，以下でのべる決定論的仮説と矛盾することを確認しよう。

設問 8 の設定において，量子力学的には，各回の実験では，部分系 A について $\sigma^A(0°)$, $\sigma^A(120°)$, $\sigma^A(240°)$ のどれか一つ，部分系 B について $\sigma^B(0°)$, $\sigma^B(120°)$, $\sigma^B(240°)$ のどれか一つしか測定できない。これに対し，決定論的に，次のように考えてみよう。

仮説： 各回の実験ごとに， 実際に対応する観測量を測定したかしなかったかにかかわらず，部分系 A で $\sigma^A(0°)$, $\sigma^A(120°)$, $\sigma^A(240°)$ を測定したとすると得られるであろう測定結果 $(s_{0°}^A, s_{120°}^A, s_{240°}^A)$，部分系 B で $\sigma^B(0°)$, $\sigma^B(120°)$, $\sigma^B(240°)$ を測定した場合に得られるであろう測定結果 $(s_{0°}^B, s_{120°}^B, s_{240°}^B)$ があらかじめ決まっているとする。設問 6 よりこれらは

$$s_{0°}^A = -s_{0°}^B, \quad s_{120°}^A = -s_{120°}^B, \quad s_{240°}^A = -s_{240°}^B \tag{5}$$

を満たすとする。

9. 上記の仮説のもと，設問 8 と同様，部分系 A で $\sigma^A(0°)$, $\sigma^A(120°)$, $\sigma^A(240°)$ をそれぞれ 1/3 の確率で測定し，部分系 B で $\sigma^B(0°)$, $\sigma^B(120°)$, $\sigma^B(240°)$ をそれぞれ 1/3 の確率で測定する。このとき，$\sigma^A(\theta)$ を測定した際に得られる測定結果を $s^A = s_\theta^A$, $\sigma^B(\varphi)$ を測定した際に得られる測定結果を $s^B = s_\varphi^B$ と書く。
   (i) $(s_{0°}^A, s_{120°}^A, s_{240°}^A) = (+1, +1, +1)$ の場合，$s^A s^B$ の期待値を求めよ。
   (ii) $(s_{0°}^A, s_{120°}^A, s_{240°}^A) = (+1, +1, -1)$ の場合，$s^A s^B$ の期待値を求めよ。
   (iii) 八通り $(s_{0°}^A, s_{120°}^A, s_{240°}^A) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ が任意に起こる場合，$s^A s^B$ の期待値は負であることを示せ。

設問 8 の量子力学による結果では $s^A s^B$ の期待値は 0 であり，上記の決定論的仮説のもとでは $s^A s^B$ の期待値は負となった。これより，量子力学は上記の決定論的仮説とは矛盾することがわかる。

（この問題は，N. David Mermin, Physics Today **38**, 4, pp.38–47 (1985) を参考にした。）

第2問

体積 V，粒子数 N の系が温度 T の熱浴と接触している状況を考える。粒子の質量を m とし，粒子間の相互作用は考えない。必要であれば，熱力学の関係式

$$
\begin{aligned}
dU &= d'Q - PdV + \mu dN, \\
d'Q &= TdS, \qquad \text{(可逆過程の場合)} \\
F &= U - TS,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を用いてよい。ここで，U は系の内部エネルギー，Q は熱量，P は圧力，μ は化学ポテンシャル，S はエントロピー，F はヘルムホルツの自由エネルギーである。

まず粒子を古典的に扱う。この場合，分配関数は

$$
Z = \frac{1}{h^{3N}N!}\int\cdots\int dp_{1x}dp_{1y}dp_{1z}\cdots dp_{Nz}dx_1dy_1dz_1\cdots dz_N\ e^{-\beta H} \tag{2}
$$

で，ハミルトニアン H は

$$
H = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m}\left(p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2\right) \tag{3}
$$

で与えられる。ここで (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}) は i 番目の粒子の運動量，(x_i, y_i, z_i) は i 番目の粒子の位置座標，h はプランク定数 $(h = 2\pi\hbar)$，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ で，k_{B} はボルツマン定数である。

1. 式 (2) の積分を実行し，$Z(T,V,N)$ を求めよ。さらに，得られた結果を用いて，この系の圧力 $P(T,V,N)$ を求めよ。必要であれば

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad (a > 0) \\
&\ln N! \approx N\ln N - N, \qquad (N\text{ が十分大きい場合})
\end{aligned}
\tag{4}
$$

   を用いてよい。

2. 式 (2) には，$1/N!$ という因子がついている。もしこの因子が無かったとすると，ヘルムホルツの自由エネルギーが，ある熱力学的性質を満たさなくなる。このことを簡潔に説明せよ。

3. この系のエントロピー $S(T,V,N)$ を求めよ。$T \to 0$ としたときに，古典的には S はどうなるか述べよ。

4. 体積が一定のときの熱容量 $C_V(T,V,N)$ を求めよ。

以下では，粒子がフェルミ粒子であるとして，量子力学的に扱う。系は化学ポテンシャル μ の粒子浴に接しているとして，グランドカノニカル分布で考える。粒子の運動エネルギーを

$$
\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \tag{5}
$$

と表す。ここで $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は粒子の波数を表す。また，体積 V は一辺の長さ L の立方体とし $(V = L^3)$，周期境界条件が満たされるものとする。ただし，スピンなどの粒子の内部自由度は考えなくてよい。

5. この系の大分配関数 $\Xi(T, V, \mu)$ は

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\boldsymbol{k}} \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu)}\right) \tag{6}$$

である。この式で，波数 $\boldsymbol{k}$ が取り得る値を求めよ。

6. 大分配関数を用いて，全粒子数の期待値 $\overline{N}$ が

$$\overline{N} = \sum_{\boldsymbol{k}} f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}) \tag{7}$$

となることを示せ。ここで $f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}})$ はフェルミ分布関数

$$f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu)} + 1} \tag{8}$$

である。

7. フェルミ粒子系の縮退温度より十分高い温度では，μ は負で絶対値の大きな値（$|\mu| \gg k_{\mathrm{B}}T$）となる。この場合，フェルミ分布関数は

$$f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}) \approx e^{-\beta(\varepsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu)} \tag{9}$$

と近似してよい。このような温度領域で，L が十分大きいとして式 (7) の $\boldsymbol{k}$ の取り得る値についての和を積分の形に書き直して積分を実行し，μ を T, V と $\overline{N}$ (簡単のために $\overline{N} = N$ と書いてよい）の関数として求めよ。

8. 設問 7 と同様の温度領域におけるエントロピーが，近似的に $S \approx -\frac{\mu}{T}N$ となることを示せ。

9. 一方，縮退温度より十分低い温度では，この自由フェルミ粒子系の熱容量 C_V は T に比例して $C_V = \gamma T$ と書けることが分かっている。このことと設問 8 の結果を考慮して，フェルミ粒子系でのエントロピーを温度の関数としてグラフにせよ。比較のために，設問 3 で考えたエントロピーの温度依存性も点線で書き加えよ。

第 3 問

同軸ケーブル中の電磁波の伝搬について考える。同軸ケーブルは図 1 に示すように，半径 a の円柱芯線と中心軸を同じにして外側にある内半径 b の円筒状導体から構成されている。円柱と円筒の間の空間は，誘電率 ϵ，透磁率 μ の絶縁体で満たされているとする。外側の円筒の厚さは十分薄く，同軸ケーブルの長さは半径に比べて十分長く，かつ直線状であるとする。芯線および円筒状導体の電気抵抗は無視できるものとする。

同軸ケーブルに沿った方向を z 軸とし，電場，磁場ともに z 軸に平行な成分を持たない軸対称な伝搬モード（以下，TEM モードと呼ぶ）について考える。ϵ と μ は定数とする。絶縁体中の電磁波は Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & (1) \\ \nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} & (2) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 & (3) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0 & (4) \end{aligned}$$

に従う。ここで $\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度である。 以下，図 1 に示す円筒座標系 (r, θ, z) で考えることとする。任意の関数 f，ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対する円筒座標系での勾配，発散，回転はそれぞれ

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{e}_z \\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial A_z}{\partial z}\right] \\ \nabla \times \boldsymbol{A} &= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\mathrm{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathrm{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\mathrm{e}_z \end{aligned}$$

で与えられる。e_r, e_θ, e_z はそれぞれ r, θ, z 方向の単位ベクトルである。以下の設問に答えよ。

1. この TEM モードの磁束密度の r 方向成分 B_r，電場の θ 方向成分 E_θ はともにゼロとなることを示せ。

2. $E_r(r, z, t)$ に対する波動方程式を求めよ。

3. z 方向の波数を k，角周波数を ω として，電場および磁束密度を複素表示でそれぞれ

   $$E_r(r, z, t) = \mathcal{E}(r)e^{ikz - i\omega t}, \quad B_\theta(r, z, t) = \mathcal{B}(r)e^{ikz - i\omega t}$$

   と記述する。$\mathcal{E}(r = a) = E_0$ としたとき，$\mathcal{E}(r)$ を求めよ。

4. 同軸ケーブルを伝搬する電磁波の位相速度を求めよ。

5. 同軸ケーブル断面を通過する単位時間あたりの電磁波のエネルギーを求めよ。

6. 位置 z，時刻 t における円筒状導体に対する芯線の電圧 $V(z, t)$ を求めよ。

7. 設問 6 で求めた電圧 V と，芯線を流れる電流 I の比 $V(z,t)/I(z,t)$ は特性インピーダンス Z_0 と呼ばれる。Z_0 を求めよ。

次に，同軸ケーブルを伝搬するパルスを考える。その電圧を $V(z,t)$ で表す。以下，ϵ および μ は周波数の関数であり，ω は波数 k の関数とする。$V(z,t)$ の複素表示を波数 k の波の重ね合わせとして

$$V(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikz - i\omega(k)t} dk$$

と表す。

8. $v(k)$ がある波数 k_0 を中心とする狭い範囲でのみ 0 でない値をとり，$\omega(k)$ が定数 A を用いて

$$\omega(k) = \omega(k_0) + A(k - k_0)$$

と近似できるとき，複素表示での電圧パルスの振幅 $|V(z,t)|$ は，その波形を変えずに同軸ケーブル中を伝搬することを示せ。

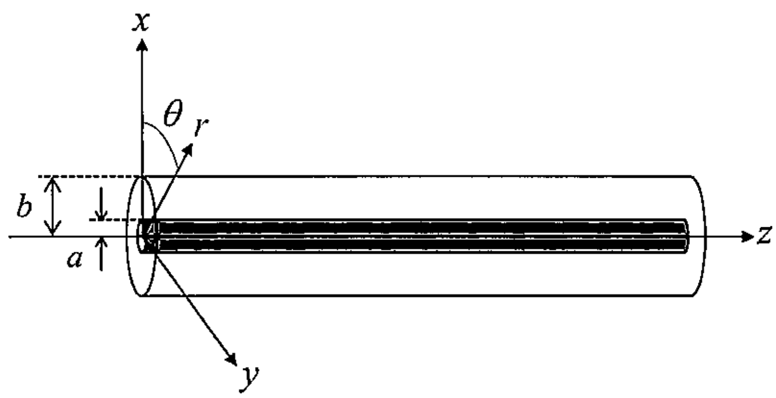


図 1: