受験番号	
氏　　名	

令和４年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

令和３年８月２３日（月）　１３時３０分～１７時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で４問ある。４問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計４枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(専門科目)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部を使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(専門科目)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第１問

量子力学において不確定性関係は重要な役割を果たす。与えられた量子状態に対する，位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の標準偏差を

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle}, \quad \Delta\hat{x} \equiv \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$$
$$\Delta p \equiv \sqrt{\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle}, \quad \Delta\hat{p} \equiv \hat{p} - \langle\hat{p}\rangle$$

と定義しよう。ここで，$\langle\hat{O}\rangle$ は演算子 $\hat{O}$ の量子力学的期待値である。以下の設問に答えよ。なお，必要があれば次の積分公式を使ってもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad (\alpha > 0)$$

また，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った量とする。

1. 波動関数

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \quad (a > 0)$$

   に対して Δx, Δp を計算し，その結果を物理的に解釈せよ。

2. 一般に，Δx と Δp の間には不等式

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

   が成立する。これを示すために，まず，任意の演算子 $\hat{O}$ とそのエルミート共役演算子 $\hat{O}^\dagger$ に対して

$$\langle\hat{O}^\dagger\hat{O}\rangle \geq 0$$

   が成立することを示せ。

3. 次に，$\hat{O} = t\Delta\hat{x} - i\Delta\hat{p}$（$t$ は任意の実数）とおくことで不等式 (1) を示せ。

4. 設問 3 の $\hat{O}$ の固有値が 0 を含むための t に関する条件を述べ，固有値 0 に対応する固有状態が不等式 (1) の等号を満足することを示せ。

5. 不等式 (1) の等号が成立する状態を最小不確定状態という。設問 4 の結果を用いて，最小不確定状態を記述する 1 に規格化された波動関数を求めよ。

第 2 問

体積 $V = L^3$ の相互作用が無視できる理想ボース気体を考える。ボース粒子の質量は m，粒子数は N とする。以下の設問に答えよ。なお，必要であれば，プランク定数を 2π で割った量 $\hbar$ を用いてもよい。

まず，スピンが 0 のボース粒子を考える。

1. 全ての一粒子固有エネルギーとそれに対応する固有波動関数 $\Psi(x, y, z)$ を求めよ。ただし，$\Psi(x, y, z)$ は周期境界条件

$$\Psi(x+L, y, z) = \Psi(x, y, z),\ \Psi(x, y+L, z) = \Psi(x, y, z),\ \Psi(x, y, z+L) = \Psi(x, y, z)$$

を満たすとする。また，基底状態のエネルギーは $E = 0$ であるとする。

2. 固有エネルギー E_i をもつ一粒子固有状態 i の大分配関数は，温度 T，化学ポテンシャル μ ($\mu \leq 0$)，ボルツマン定数 k_{B} を用いて

$$\Xi_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(E_i - \mu)n_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right]$$

で与えられる。このとき，状態 i に存在する粒子数の統計力学的平均値 (ボース分布関数) $f(E_i, \mu)$ を求めよ。導出の過程も示すこと。

以下では，L が十分大きく，エネルギー準位が連続とみなせるとする。

3. エネルギーが 0 から E の範囲にある一粒子固有状態の数を $\Omega(E)$ とすると，状態密度は $D(E) = \dfrac{d\Omega(E)}{dE}$ で与えられる。$D(E)$ を求めよ。

4. ある温度 $T = T_{\mathrm{c}}$ より高温では，設問 2 と 3 の結果を用いて，全粒子数 N は

$$N = \int_0^{\infty} f(E, \mu)D(E)dE \qquad (1)$$

と表される。式 (1) の右辺は，温度一定のもとで，μ ($\mu \leq 0$) の単調増加関数である。$\mu = 0$ のときの積分を評価せよ。なお，

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

を用いてもよい。ここで，$\zeta(x)$ はリーマンのゼータ関数である。

5. $T < T_{\mathrm{c}}$ では，マクロな数の粒子がエネルギー最低の一粒子状態をとり，全粒子数 N は，エネルギー最低の一粒子状態 ($E = 0$) にある粒子数 N_0 とそれ以外の状態にある粒子数の和として以下のように表される。

$$N = N_0 + \int_0^{\infty} f(E, \mu = 0)D(E)dE$$

この現象をボース・アインシュタイン凝縮と呼ぶ。転移温度 T_{c} を求めよ。

6. $T < T_{\rm c}$ における N_0 を N，T，$T_{\rm c}$ を用いて表せ。

7. $T < T_{\rm c}$ における定積熱容量 $C_V = \left.\dfrac{\partial E}{\partial T}\right|_{N,V}$ は定数 a を用いて $C_V = aT^\gamma$ と表される。γ の値を求めよ。

次に，ボース粒子がスピン S をもつ場合を考える。

8. 外部磁場がない場合の状態密度 $D(E)$ とボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 $T_{\rm c}'$ を求めよ。

9. 磁束密度の大きさが B の外部磁場を z 方向にかけると，ゼーマンエネルギーによりスピン自由度の縮退が解ける。ゼーマンエネルギーは c をある正の定数として $-cm_zB$ (m_z はスピン磁気量子数 $-S, -S+1, \cdots, S$) と書けるとする。ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 $T_{\rm c}'$ を決める方程式を書き下せ。

10. 転移温度 $T_{\rm c}'$ の B 依存性の概略を図示し，その $cB \gg k_{\rm B}T_{\rm c}'$ における振る舞いを述べよ。なお，$\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx = 1$ を用いてもよい。

第 3 問

3 次元空間において，$z<0$ の領域から，平面電磁波が入射する場合について考える。入射した電磁波は，$z<0$ の領域とは誘電率が異なる $z>0$ の領域との境界（$z=0$）において，透過および反射する。電磁波の速さは，$z<0$ で v，$z>0$ で $2v$ であるとし，透磁率は $z<0$ と $z>0$ で等しいとする。Maxwell 方程式は,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}\right) = \frac{\partial(\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，ε は誘電率，μ は透磁率を表す。また，式 (1) と式 (2) より，境界面において $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の接線成分が連続であることが導かれる。必要ならば，任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V}$ であることを用いてよい。

はじめに，平面電磁波が境界面に垂直に入射する場合を考える。入射波の電場は，その振幅 E_0 を用いて，$\boldsymbol{E}_1 = (0, E_0 \cos(kz - \omega t), 0)$ と書けるものとする。ここで，k と ω は，いずれも正の定数であり，$\omega = vk$ である。

1. 入射波の磁束密度は，定ベクトル $\boldsymbol{B}_0$ を用いて，$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 \cos(kz - \omega t)$ と書ける。式 (1) を満たすような $\boldsymbol{B}_0$ を，E_0 と v を用いて表せ。

2. $z>0$ における誘電率は，$z<0$ における誘電率の何倍か。

3. 透過波の電場は $\boldsymbol{E}_2 = (0, T\cos(kz/2 - \omega t), 0)$，反射波の電場は $\boldsymbol{E}_3 = (0, R\cos(-kz - \omega t), 0)$ と書くことができる。ここで，T と R は，z と t に依らない定数である。境界面において $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$（または $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$）の接線成分が連続であることを用いて，$T/E_0$ を求めよ。

次に，入射波の電場が $\boldsymbol{E}_1 = (0, E_0 \cos(qx + 2qz - \omega t), 0)$ と書ける場合を考える。ここで，q は正の定数である。透過波の電場を，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を用いて，$\boldsymbol{E}_2 = (0, T\cos(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{Q} - \omega t), 0)$ と書く。

4. $\boldsymbol{Q}$ を q を用いて表せ。

5. T の E_0 に対する比 T/E_0 を求めよ。

最後に，入射波の電場が $\boldsymbol{E}_1 = (0, E_0 \cos(Kx + Kz - \omega t), 0)$ と書ける場合を考える。ここで，K は正の定数である。この場合，電磁波は全反射するが，$z>0$ の領域にもある程度電磁波が浸透する。

6. $z>0$ の領域での電場の振幅を z の関数として書け。

第 4 問

以下の設問 1 および 2 に答えよ。

1. $f(z)$ を，実軸上を含む複素上半平面で正則な関数とする。複素上半平面で $|z| \to \infty$ としたとき，$f(z)$ は 0 に収束する。また，x_0 は実数である。

   (i) 経路 C_- と C_+ を，$z = x_0$ を下半平面及び上半平面に迂回した，$z = -\infty$ から $z = \infty$ までの，実軸上の経路とする（図 1)。以下の積分 I_- と I_+ を求めよ。

   $$I_- = \int_{C_-} dz \frac{f(z)}{z - x_0}, \quad I_+ = \int_{C_+} dz \frac{f(z)}{z - x_0}$$

   ただし，$f(z)$ は C_- 上および C_- の複素上半平面側においても正則とする。解答は $f(x_0)$ を用いて表してよい。

   (ii) θ_n（$n = 1, 2$）を $0 < \theta_n < \pi$ を満たす実数，また，$z_n = x_0 + ae^{i\theta_n}$（$a$ は正の実数）とする。C_{12} を，z_1 を始点とし z_1 と z_2 をつなぐ線分で与えられる経路とする（図 1)。以下の量を θ_1，θ_2，$f(x_0)$ を用いて表せ。

   $$\lim_{a \to +0} \int_{C_{12}} dz \frac{f(z)}{z - x_0}$$

   (iii) A をある定数として以下の関係式が成り立つことを示すとともに，定数 A を求めよ。

   $$\mathrm{Re}\, f(x_0) = A \lim_{\epsilon \to +0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} dx \frac{\mathrm{Im}\, f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} dx \frac{\mathrm{Im}\, f(x)}{x - x_0} \right]$$

   ただし上式で，x に関する積分は実軸上の積分である。また，$\mathrm{Re}\, f(z)$ と $\mathrm{Im}\, f(z)$ はそれぞれ関数 $f(z)$ の実部と虚部を表す。

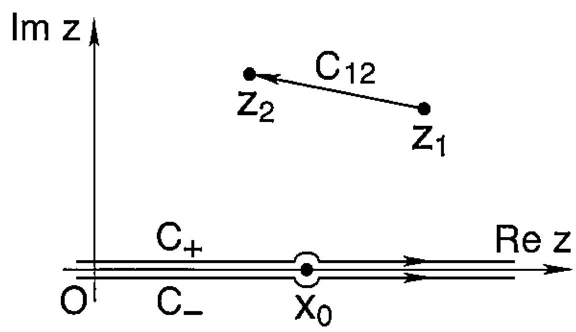

図 1: 積分経路。ただし，経路 C_- と C_+ は実軸上からずらして表示している。

2. n を $n \geq 2$ の自然数として，I を n 次元単位行列，$\vec{v}$ を n 次元実単位ベクトルとする（$\vec{v}^T\vec{v}=1$，ただし $\vec{v}^T$ は $\vec{v}$ の転置ベクトル）。そして，$n \times n$ 実行列 C を以下のように与える。

$$C = pI - q\vec{v}\vec{v}^T$$

ただし p と q は正の実数である。

(i) $\vec{v}$ は C の固有ベクトルである。対応する固有値を求めよ。

(ii) $\vec{w}$ を $\vec{v}$ と直交するベクトルとすると，$\vec{w}$ は C の固有ベクトルである。対応する固有値を求めよ。

(iii) 行列式 $\det C$ を求めよ。

次に，A を $n \times n$ の実対称行列とし，

$$B = CA$$

とする。A の固有値は 0 を含まない。行列 B は，$q = q_0$ で $\det B = 0$ となるとする。

(iv) q_0 を p を用いて表せ。

(v) 行列 B が実行列であることに注意して，β が B の固有値であればその複素共役 β^* も B の固有値であることを示せ。

さらに，n 次元実ベクトル $\vec{g}(t)$ は以下の微分方程式に従うとする。

$$\frac{d}{dt}\vec{g} = -B\vec{g} \qquad (1)$$

(vi) A の固有値が全て正の場合を考える。$q > q_0$ のとき，任意の n 次元実単位ベクトル $\vec{v}$ に対して $\lim_{t\to\infty} ||\vec{g}(t)|| = \infty$ となるような微分方程式 (1) の解が存在することを示せ。ただし，$||\vec{g}|| \equiv \sqrt{\vec{g}^T\vec{g}}$ である。

(vii) A が一つだけ負の固有値を持つ場合を考える。$q > q_0$ のとき，$\vec{v}$ をうまく選ぶと微分方程式 (1) の任意の解が $\lim_{t\to\infty} ||\vec{g}(t)|| = 0$ となる。このような $\vec{v}$ が存在することを示せ。