受験番号	
氏　　名	

令和５年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

専　　門　　科　　目

令和４年８月２３日（火）　１３時３０分〜１７時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で４問ある。４問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計４枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(専門科目)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部の余白は使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(専門科目)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第１問
ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{2m} \hat{P}_k^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{X}_k^2 \right)$$

で与えられる１粒子の２次元調和振動子を量子力学的に考える。m は質量，ω は角振動数である。また $\hat{X}_k$, $\hat{P}_k$ はそれぞれ座標と運動量の演算子であり，以下の交換関係をみたす。

$$[\hat{X}_k, \hat{X}_\ell] = [\hat{P}_k, \hat{P}_\ell] = 0, \qquad [\hat{X}_k, \hat{P}_\ell] = i\hbar\delta_{k\ell} = \begin{cases} i\hbar & (k = \ell) \\ 0 & (k \neq \ell) \end{cases}, \qquad (k, \ell = 1, 2)$$

ただし $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ であり，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。記号 i は虚数単位（$i^2 = -1$ をみたす複素数）とする。

1. 演算子 $\hat{a}_k$，$\hat{a}_k^\dagger$（$k = 1, 2$）を以下のように定義する。
$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(m\omega \hat{X}_k + i\hat{P}_k \right), \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(m\omega \hat{X}_k - i\hat{P}_k \right)$$
このとき $[\hat{a}_k, \hat{a}_\ell^\dagger]$ $(k, \ell = 1, 2)$ を求めよ。

2. $\hat{H}$ を $\hat{a}_k$ と $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて表せ。また，$[\hat{H}, \hat{a}_k]$，$[\hat{H}, \hat{a}_k^\dagger]$（$k = 1, 2$）を求めよ。

3. $\hat{H}$ の基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ $(k = 1, 2)$ をみたす。基底状態のエネルギーを求めよ。

4. 設問３の基底状態のエネルギーを E_0 とし，励起状態のエネルギーを低い方から順に $E_1, E_2, \cdots$（$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$）とするとき，エネルギー E_n を持つ状態を $|0\rangle$ と $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて表せ。またその縮退度を求めよ。ただし，状態の規格化は行わなくてもよい。

次に，角運動量演算子 $\hat{L}$ を $\hat{L} = \hat{X}_1\hat{P}_2 - \hat{X}_2\hat{P}_1$ で定義する。

5. $\hat{L}$ を $\hat{a}_k$ と $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて表せ。また $[\hat{H}, \hat{L}]$ を求めよ。

6. 複素数 β, γ を用いて演算子 $\hat{A}_+^\dagger = \beta\hat{a}_1^\dagger + \gamma\hat{a}_2^\dagger$，$\hat{A}_-^\dagger = \beta\hat{a}_1^\dagger - \gamma\hat{a}_2^\dagger$ を定義する。このとき β, γ を適当に選ぶと，$[\hat{L}, \hat{A}_\eta^\dagger] = c_\eta \hat{A}_\eta^\dagger$ $(\eta = +, -)$ をみたすことができる。ただし，c_η は実数であり，$c_+ > c_-$ と定める。このような β, γ の具体例を１組求め，そのときの c_+, c_- を求めよ。

7. 状態 $|\alpha\rangle$ がエネルギーと角運動量の同時固有状態であり，以下の式をみたすとする。
$$\hat{H}|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle, \quad \hat{L}|\alpha\rangle = L_\alpha|\alpha\rangle$$
ただし E_α と L_α は $\hat{H}$ と $\hat{L}$ の固有値である。このとき，設問６で求めた $\hat{A}_\pm^\dagger$ を用いて状態
$$\hat{A}_+^\dagger|\alpha\rangle, \quad \hat{A}_-^\dagger|\alpha\rangle$$
を考えると，これらの状態もエネルギーと角運動量の同時固有状態になる。これらの状態のエネルギーと角運動量の固有値を E_α，L_α を用いて表せ。

8. 設問 7 の結果から、状態

$$|n,\ell\rangle = c_{n,\ell}\left(\hat{A}_+^\dagger\right)^\ell \left(\hat{A}_-^\dagger\right)^{n-\ell}|0\rangle, \quad \left(\begin{array}{l} n=0,1,2,\cdots \\ \ell=0,1,2,\cdots,n \\ c_{n,\ell}\neq 0 \end{array}\right)$$

はエネルギーと角運動量の同時固有状態であることがわかる。このとき

$$\hat{H}|n,\ell\rangle = E_n|n,\ell\rangle, \quad \hat{L}|n,\ell\rangle = L_{n,\ell}|n,\ell\rangle$$

をみたす E_n と $L_{n,\ell}$ を求めよ。また $0\leq n\leq 3$ における $(L_{n,\ell},E_n)$ の全ての組を，横軸を角運動量，縦軸をエネルギーとする 2 次元平面上の点として図示せよ。

第2問

温度T，化学ポテンシャルμの粒子浴に接している電子の集団をグランドカノニカル分布で考える。系は一辺がL，体積$V = L^3$の立方体であるとし，周期境界条件が課されているとする。以下では電子間の相互作用は無視できるとし，スピンの自由度は考えなくてよい。また，記号iは虚数単位を表すものとする。

物質のなかでもディラック半金属やワイル半金属とよばれる物質中の電子は，真空中とは大きく異なる運動エネルギーを持つ。ここではそれらを簡略化した模型として，波数$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$の電子が2成分の内部自由度をもつ場合を考えよう。位置$\boldsymbol{x}$における電子の波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{k}), \quad \phi(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\boldsymbol{k}) \\ \phi_2(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}$$

と表せるとし，$\phi(\boldsymbol{k})$は固有値方程式

$$H(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k}) = \varepsilon_{\boldsymbol{k}}\phi(\boldsymbol{k})$$

に従う。$H(\boldsymbol{k})$は2×2行列のハミルトニアンであり，以下で与えられるとする。

$$H(\boldsymbol{k}) = \hbar v(k_x\sigma_x + k_y\sigma_y + k_z\sigma_z)$$

ここで$\hbar$はプランク定数を2πで割った定数，vは群速度 (定数)，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$は以下で与えられるパウリ行列である。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$は$H(\boldsymbol{k})$の固有値である。以下では，二つの固有値を$\varepsilon_{\boldsymbol{k},a}$ $(a = 1, 2,\ \varepsilon_{\boldsymbol{k},1} \leq \varepsilon_{\boldsymbol{k},2})$で表し，波数$\boldsymbol{k}$の絶対値には上限$k_0$ $(|\boldsymbol{k}| \leq k_0)$があるとする。

まず，$k_x = k_y = 0$の場合を考える。このとき$H(\boldsymbol{k})$は対角行列である。

1. 周期境界条件よりk_zはどのような値を取り得るか答えよ。また，$\varepsilon_{\boldsymbol{k},1}, \varepsilon_{\boldsymbol{k},2}$を$k_z$の関数として図示せよ。

2. エネルギーが0からε (ただし$\varepsilon > 0$) の間にある$k_x = k_y = 0$をみたす1粒子の状態の数を$\Omega_0(\varepsilon)$とする。系の体積が十分大きいときに$\Omega_0(\varepsilon)$を求めよ。

次に，任意の$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$について考える。

3. $H(\boldsymbol{k})$の固有値$\varepsilon_{\boldsymbol{k},1}, \varepsilon_{\boldsymbol{k},2}$を求めよ。

4. エネルギーが0からε (ただし$\varepsilon > 0$) の間にある1粒子の状態の数を$\Omega(\varepsilon)$とおく。系の体積が十分大きいときに$\Omega(\varepsilon)$を求め，状態密度$D(\varepsilon) = \dfrac{d\Omega(\varepsilon)}{d\varepsilon}$を計算せよ。

化学ポテンシャルが $\mu = 0$ に固定されている場合を考える。このとき，電子がフェルミ粒子であることを考慮すると，大分配関数は

$$\Xi(T, V) = \prod_{k} \prod_{a=1}^{2} \sum_{n_{k,a}=0}^{1} \exp(-\beta \varepsilon_{k,a} n_{k,a})$$

で与えられる。ここで $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ であり，k_{B} はボルツマン定数である。

5. 自然対数をとった $\log \Xi$ はある関数 $F(\varepsilon)$ を用いて以下の積分形に書き直せる。

$$\log \Xi = \int_{0}^{\varepsilon_0} F(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

ただし，$\varepsilon_0 = \hbar v k_0$ である。$F(\varepsilon)$ を状態密度 $D(\varepsilon)$ と ε の関数を用いて表せ。

6. $\varepsilon_0 \gg k_{\mathrm{B}}T$ のときに，設問 5 の積分を実行すると，$\log \Xi$ は ε_0 の関数として

$$\log \Xi = (\varepsilon_0 \text{ の有限次の多項式}) + G(\varepsilon_0)$$

と表せる。ここで $G(\varepsilon_0)$ は $\lim_{\varepsilon_0 \to \infty} G(\varepsilon_0) = 0$ をみたす関数である。$G(\varepsilon_0)$ の項を無視する近似をすることで $\log \Xi$ を求めよ。ただし，以下の公式を用いてよい。

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \frac{7\pi^4}{120}$$

7. $\varepsilon_0 \gg k_{\mathrm{B}}T$ のときに，設問 6 の結果を用いて内部エネルギー E，および比熱 $C = \dfrac{\partial E}{\partial T}$ を求めよ。

8. 通常の金属では低温で比熱が温度に比例する。この理由を簡潔に述べよ。また，設問 7 において低温で比熱が通常の金属とは定性的に異なる振る舞いをする理由を簡潔に述べよ。

第 3 問

電磁気における多極子は様々な物理系で登場する。一般に多極子は物質の構造や物性に影響を与える。以下では電気定数を ε_0 とし，座標はすべてデカルト座標系で表記する。観測点の位置はベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で表し，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする。図はすべて xy 平面 $(z = 0)$ 上の様子を表している。

図 1(a) のように座標 $(0, \frac{d}{2}, 0)$ に正の点電荷 e，座標 $(0, -\frac{d}{2}, 0)$ に負の点電荷 $-e$ を配置した。d は正の定数である。このような電気双極子を，図 1(b) のように負電荷から正電荷に向く白抜き矢印で表す。図 1(c) に示すように，y 軸の正方向を向いた電気双極子を原点 O に配置し，x 軸の正方向に対して角度 θ をなす向きの電気双極子を座標 $(0, a, 0)$ に配置した。a は正の定数である。以下の設問 2 から 5 では，d は r, a より十分に小さいとして，最も支配的な項のみ考慮すること。

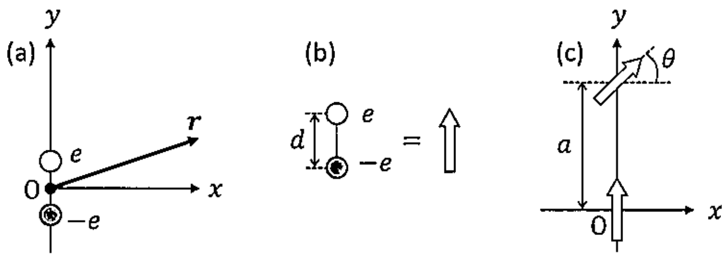

図 1: 電気双極子の配置図。

1. $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|$ を $\dfrac{r_0}{r}$ の 1 次まで展開せよ。ただし，$r_0 = |\boldsymbol{r}_0|$ とし，$r_0 \ll r$ であるとする。

2. 図 1(a) に示した系の $\boldsymbol{r}$ における静電ポテンシャルを，$\dfrac{d}{r}$ について展開して求めよ。ただし，無限遠における静電ポテンシャルの値をゼロとする。

3. 設問 2 の結果を使って，図 1(a) に示した系の $\boldsymbol{r}$ における電場の x, y, z 成分を求めよ。

4. 図 1(c) に示した系の静電エネルギー U を求めよ。ただし，位置 $\boldsymbol{r}$ に配置された電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ に電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が作用したときの静電エネルギー U は以下の式で書ける。

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

   ここで，負電荷 $-e$ から正電荷 e までのベクトルを $\boldsymbol{d}$ として，$\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{d}$ で与えられ，$|\boldsymbol{d}| \ll r$ であるものとする。

5. 図 1(c) に示した系の静電エネルギーが最も小さくなるような角度 θ の値を答えよ。

多原子分子では電荷分布に空間的偏りが生じることがある。例えば，2 原子分子の電荷分布を模式的に表したものとして，図 2(a) のような点電荷の分布を考える。原点 O に正電荷 $2e$，座標

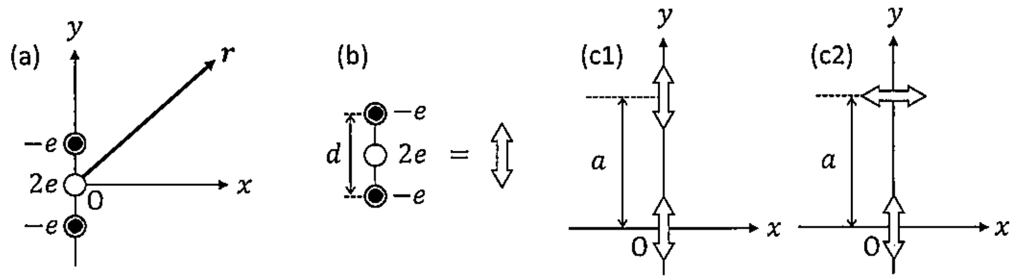

図 2: 電気四極子の配置図。

$(0, \frac{d}{2}, 0)$ と $(0, -\frac{d}{2}, 0)$ に負電荷 $-e$ を配置した。d は正の定数である。このような電荷分布は電気四極子をなし，電気四極子を図 2(b) のように電荷の並びに沿って白抜き双方向矢印で表す。

一般的な電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$ に対して観測点の位置が電荷分布の広がりより十分に遠方にある場合，位置 $\boldsymbol{r}$ における静電ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ が

$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{r}) &\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i p_i}{r^3} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_i x_j Q_{ij}}{r^5}\right) \\
q &= \int \rho(\boldsymbol{r}')d^3r' \\
p_i &= \int x_i' \rho(\boldsymbol{r}')d^3r' \\
Q_{ij} &= \frac{1}{2}\int \left(3x_i'x_j' - (r')^2\delta_{ij}\right)\rho(\boldsymbol{r}')d^3r'
\end{aligned}
\tag{1}
$$

と近似できることを用い，以下の設問 6 から 8 に答えよ。ただし，下付きの添字 1, 2, 3 はそれぞれ物理量の x, y, z 成分を表し，$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$，$\boldsymbol{r}' = (x_1', x_2', x_3') = (x', y', z')$，$r' = |\boldsymbol{r}'|$ とする。また，δ_{ij} は $i = j$ のときに 1，それ以外は 0 となる記号 (クロネッカーのデルタ) を表し，$\int d^3r'$ は全空間にわたる積分である。

6. 式 (1) を使って，図 2(a) に示した系の電荷 q，電気双極子モーメントの成分 p_i $(i = 1, 2, 3)$，電気四極子モーメントの成分 Q_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ を求めよ。

7. 式 (1) と設問 6 の結果を使って，図 2(a) に示した系の $\boldsymbol{r}$ における静電ポテンシャルおよび電場の x, y, z 成分を求めよ。

8. 図 2(c1) の系では，y 軸に沿って電気四極子を原点 O と座標 $(0, a, 0)$ に配置した。一方，図 2(c2) の系では，y 軸に沿って電気四極子を原点 O に配置し，x 軸に沿って電気四極子を座標 $(0, a, 0)$ に配置した。a は正の定数である。図 2(c1) と図 2(c2) の系の静電エネルギー U をそれぞれ求めよ。また，図 2(c1) と図 2(c2) のどちらの系の静電エネルギーが小さいかを答えよ。ただし，位置 $\boldsymbol{r}$ に配置した Q_{ij} を持つ電気四極子に電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \left(E_1(\boldsymbol{r}), E_2(\boldsymbol{r}), E_3(\boldsymbol{r})\right)$ が作用したときの静電エネルギー U は以下の式で書ける。

$$
U = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} Q_{ij}\frac{\partial E_j(\boldsymbol{r})}{\partial x_i}
$$

第 4 問
以下の設問に答えよ。ただし，記号 i は虚数単位 ($i^2 = -1$ をみたす複素数) とする。

1. 実数 θ に関する次の実積分を複素積分を用いて求めることを考える。ただし，n は正の整数であり，a, b は $0 < b < a$ をみたす実数とする。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a + b\cos\theta} d\theta \tag{1}$$

   (a) 複素数 $e^{i\theta}$ を実数 x, y を用いて $e^{i\theta} = x + iy$ と表したときの x と y を，θ を用いて表せ。ただし，θ は実数とする。

   (b) $z = e^{i\theta}$ とおいて変数変換をし，式 (1) の実積分を $I = \int_C f(z)dz$ の形の複素積分で表したときの $f(z)$ を求めよ。また，このときの積分経路 C を複素平面上で図示せよ。ただし，積分経路 C は，$z = e^{i\theta}$ の変数変換によって定めるとする。

   (c) 積分経路 C の内部にある $f(z)$ の極をすべて求めよ。

   (d) $n = 2$ の場合について複素積分を実行し，I を求めよ。

2. (a) 正方行列 X に対して，e^X を

$$e^X = \mathbb{I} + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \tag{2}$$

   と定義する。ただし，式 (2) の $\mathbb{I}$ は単位行列である。V が逆行列を持つ行列 (正則行列) のとき，$e^{VXV^{-1}} = Ve^XV^{-1}$ が成立することを証明せよ。

   (b) 次の行列 A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

   のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。

   (c) 式 (3) の行列 A はユニタリー行列 U と対角行列 D を用いて $A = UDU^{-1}$ と表すことができる。U と D を求めよ。

   (d) 式 (3) の行列 A に対して，e^{itA} を 4×4 行列で表せ。ただし，t は実数とする。