

受験番号	
氏名	

令和6年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

専 門 科 目

令和5年8月22日（火） 13時30分～17時30分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で4問ある。4問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名（専門科目）、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部の余白は使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（専門科目）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

一般化座標 q とそれに共役な運動量 p によってハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q), \quad V(q) = -\frac{1}{2}q^2 \quad (1)$$

で与えられるとき、以下の設問に答えよ。

1. ハミルトンの運動方程式に基づいて、 p と q の和と差がどのように振る舞うかを述べよ。ただし、 $p+q$ の初期値はゼロではないとする。
2. 前問の結果に基づき、作用関数

$$S(q) = \int pdq = \int^q p(q')dq' \quad (2)$$

が十分時間がたった後、 q のどのような関数に漸近するか述べよ。

以下ではこのハミルトニアンによって記述される系に対し、通常の正準量子化の手続きを取ることとする。すなわち、 p, q を演算子 \hat{p}, \hat{q} と読み替え、交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を課す。 \hbar はプランク定数を 2π で割った量である。

3. 演算子 \hat{a}, \hat{a}^\dagger をそれぞれ

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} - i\hat{p}) \quad (3)$$

で定義したとき、交換子 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ の値を求めよ。

4. ハミルトニアン $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 - \frac{1}{2}\hat{q}^2$ を、 \hat{a}^2 と $(\hat{a}^\dagger)^2$ を用いて表せ。

いま、スクイーズ演算子 $\hat{S}(r, \phi)$ を、実数 r, ϕ の関数として

$$\hat{S}(r, \phi) = \exp \left[\frac{r}{2} \left(\hat{a}^2 e^{-2i\phi} - (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\phi} \right) \right] \quad (4)$$

によって定義する。以下の公式が成り立つことが知られている。

$$\hat{S}^\dagger(r, \phi) \hat{a} \hat{S}(r, \phi) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{2i\phi} \sinh r \quad (5)$$

$$\hat{S}^\dagger(r, \phi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(r, \phi) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-2i\phi} \sinh r \quad (6)$$

$$\hat{S}^\dagger(r, \phi) \hat{S}(r, \phi) = 1 \quad (7)$$

また、演算子 \hat{a} によって消される状態、すなわち $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす状態 $|0\rangle$ を真空と呼ぶことにし、

$$|(r, \phi)\rangle = \hat{S}(r, \phi)|0\rangle \quad (8)$$

をスクイーズド状態と呼ぶ。

5. 真空をハミルトニアン \hat{H} によって時刻 0 から t まで発展させた状態 $|\psi(t)\rangle$ は, スクイーズド状態

$$|\psi(t)\rangle = \left| \left(t, -\frac{\pi}{4} \right) \right\rangle \quad (9)$$

に一致することを示せ。

6. スクイーズド状態 (8) に対し,

$$\hat{p}|(r, \phi)\rangle = \alpha(r, \phi)\hat{q}|(r, \phi)\rangle, \quad \alpha(r, \phi) = i \frac{\cosh r + e^{2i\phi} \sinh r}{\cosh r - e^{2i\phi} \sinh r} \quad (10)$$

という等式が成り立つことを示せ。

7. 前問の結果を用いて, 式 (9) で表されるスクイーズド状態の座標表示での波動関数 $\psi(q, t) = \langle q|\psi(t)\rangle$ を求めよ。規格化定数は計算しなくて良い。
8. 得られた波動関数と式 (2) を比較することにより, スクイーズド状態がどのような性質を持つか説明せよ。

第2問

容器の中に同一種の単原子分子 $N (\gg 1)$ 個からなる理想気体が閉じ込められている (図1)。各分子の質量は m であり、分子は互いに区別できない。容器にはピストンが付いており、容器内の体積を変化させることができる。この系を古典統計力学に基づいて考察する。プランク定数を h 、ボルツマン定数を k として以下の設問に答えよ。必要であれば定数 $a > 0$ に対して $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であること、および、 $N \gg 1$ に対して $\log N! \simeq N \log N - N$ が成り立つことを使ってよい。また、解答に際しては $\alpha = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ を用いてよい。

まず、容器内の絶対温度と体積をそれぞれ T 、 V に保った平衡状態を考える。

1. N 個の気体分子に対する分配関数を $Z(T, V, N)$ とする。 $z_1(T, V) = Z(T, V, 1)$ を求めよ。また、 $Z(T, V, N)$ を $z_1(T, V)$ と N を用いて表せ。
2. ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V, N)$ を求めよ。
3. 設問2で求めた $F(T, V, N)$ が示量性を持つことを示せ。
4. 気体のエネルギーを E とする。 $\langle E \rangle$ を求めよ。また、比 $\frac{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}{\langle E \rangle^2}$ を評価せよ。ただし、 $\langle A \rangle$ はカノニカル分布に関する A の期待値を表す。
5. エントロピー S を求めよ。

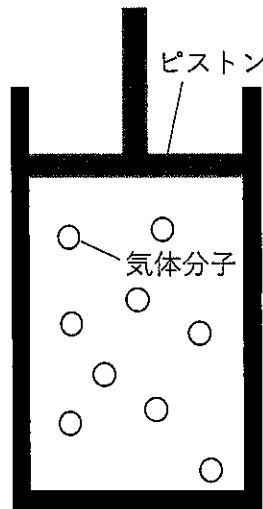


図1: 容器内に閉じ込められた理想気体

次に、容器内の絶対温度と圧力をそれぞれ T , p に保った平衡状態を考える。

6. 容器内の体積 V を求めよ。

7. 化学ポテンシャル μ を T , p の関数として表せ。

更に、気体を閉じ込めている容器内 (図1) の底面の状態について考える。底面には、1サイトあたり高々1個の気体分子を吸着する吸着サイトが M 個存在する (図2)。ただし、 $N \gg M \gg 1$ とする。吸着サイト1個あたりのエネルギーは、分子を吸着しているとき $-\epsilon$ ($\epsilon > 0$)、吸着していないとき0であるとし、各吸着サイトは独立に分子を吸着するとする。

8. M 個の吸着サイトに対する大分配関数 $\Xi(T, \mu, M)$ を求めよ。

9. 吸着サイトが分子を吸着している割合 θ を T , μ の関数として表せ。

10. T を一定に保ち θ を圧力 p の関数として表したときのグラフの概形を図示せよ。

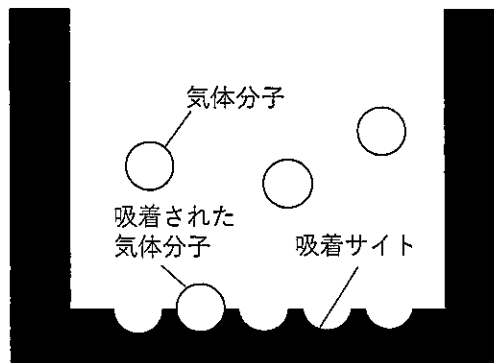


図2: 容器内の底面の様子

第3問

電磁波と荷電粒子の相互作用に関係した2つの物理現象について調べる。以下の設問に答えよ。本問では、簡単のため、荷電粒子は x 軸上のみを運動し、 x 軸上における電場は、位置 x と時刻 t の関数 $E(x,t)$ を用いて $E = (E(x,t), 0, 0)$ と表されるものとする。荷電粒子の速さは光速より十分小さく、磁場の影響は無視できるものとする。また、荷電粒子の大きさは電磁波の波長よりも十分に小さいものとする。

まず、荷電粒子による電磁波の散乱現象(レイリー散乱)を調べる。質量 m 、電荷 q を持つ1つの荷電粒子に、電場による力と、原点からの変位 x に比例した力 $-kx$ (k は正の定数)がはたらくものとする。

1. 荷電粒子の x 軸方向の運動方程式を求めよ。ただし、減衰項は無視できるものとする。
2. 荷電粒子が、 z 軸の負の方向から入射する平面電磁波の中に置かれ、 x 軸方向に一定振幅で振動している場合を考える(図1)。電磁波の電場が、荷電粒子の位置において、角周波数 ω 、および定数 E_0 を用いて $E(x,t) = E_0 \sin(\omega t)$ と表される。このとき、設問1の運動方程式を解き、角周波数 ω で振動する解を求めよ。また、共振の角周波数 ω_0 を k 、 m を用いて示せ。

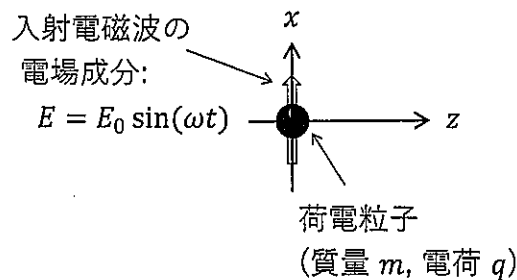


図1: x 軸上を運動する荷電粒子と入射電磁波

3. この荷電粒子の運動によって、電磁波が放射される。この電磁波は、荷電粒子によって、入射電磁波がさまざまな方向に散乱されたものと解釈できる。荷電粒子の加速度ベクトルを a 、この電磁波の放射方向を表す単位ベクトルを n とする。このとき、荷電粒子から放射される電磁波強度と、単位面積当たりの入射電磁波強度の比(散乱断面積)は、 $|n \times (n \times a)|^2$ に比例する。設問2の結果を踏まえて、入射電磁波が赤い光である場合と青い光である場合のどちらが散乱されやすいかを述べよ。また、 x 軸方向、 z 軸方向のどちらに散乱されやすいかを、理由とともに述べよ。ただし、 $\omega \ll \omega_0$ とする。

次に、微小誘電体がレーザー光などの電磁場内にトラップされる現象 (光ピンセット) について考える。 x 軸上の位置 x にある誘電体に電磁波が入射すると、誘電分極によって電気双極子モーメント $p = \alpha E(x, t)$ が生じる (α は正の定数)。この電気双極子と入射電磁波の相互作用によって、電場勾配に依存した力がはたらき、誘電体がレーザー光の中心軸方向に引き込まれる。この現象を調べる。

4. まず、準備として、レーザー光における電場勾配を求める。レーザー光による電場が、 x 軸上で、角周波数 ω 、および定数 E_0, σ を用いて

$$E(x, t) = E_0 \exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2}\right] \sin(\omega t) \quad (1)$$

と表されるものとする。 $x = b$ のまわりでテイラー展開した上で1次の展開項までとり、

$$E(x, t) \simeq E_1 \{1 + \beta(x - b)\} \sin(\omega t) \quad (2)$$

と書き表したときの係数 E_1, β を求めよ。

5. 次に、微小誘電体が $x = b$ の位置に置かれている場合を考える (図2)。入射電磁波によって微小誘電体内に生じた電気双極子モーメントは、2つの荷電粒子 (電荷 $+q$ と $-q$ 、それぞれの x 座標 $b + d/2$ と $b - d/2$) で構成された微小双極子によるものと解釈できる。このとき、その電気双極子モーメントは、 $p = qd$ となる。入射電磁波 (レーザー光) の電場が式 (2) で表され、2つの荷電粒子に対して、この電場による力がそれぞれ独立に働くと考えた場合、それらの力の和を $E_1, \beta, q, d, \omega, t$ を用いて表せ。

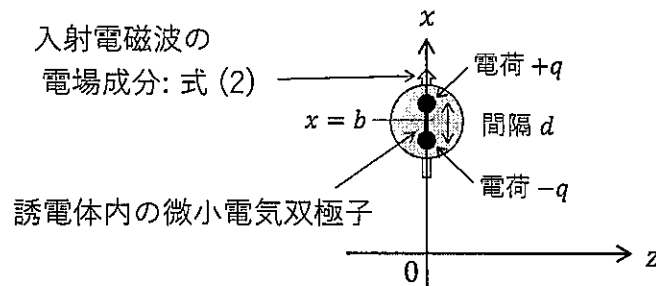


図 2: 入射電磁波による誘電分極

6. 設問5の結果が、微小双極子に働く力となる。この力を、 $E_1, \alpha, \beta, \omega, t$ を用いて表せ。その上で、レーザー光の中心軸付近に誘電体が引き込まれることを説明せよ。ただし、 $|\beta d| \ll 1$ として良い。
7. 以上とは別の考察として、光ピンセットの現象を解釈する。電場のエネルギーに着目することにより、誘電体がレーザー光の中心軸付近に引き込まれる理由を簡潔に説明せよ。

第4問

以下の設問に答えよ。ただし、記号 i は虚数単位とする。

1. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \quad (1)$$

で定義する。 $\alpha > 0$ とし、関数 $g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$ のフーリエ変換 $\hat{g}_\alpha(\omega)$ を求めることを考える。

(a) $\hat{g}_\alpha(\omega)$ は ω の実関数として偶関数か奇関数かを答えよ。

$\omega \leq 0$ のとき、 $\hat{g}_\alpha(\omega)$ は z についての複素積分の極限として以下のように表せる。

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-i\omega z} g_\alpha(z) dz \quad (2)$$

ただし、 C_R は $z = -R$ から $z = R$ までの実軸上の経路と上半平面の半径 R の半円周とからなる積分経路である (図1)。

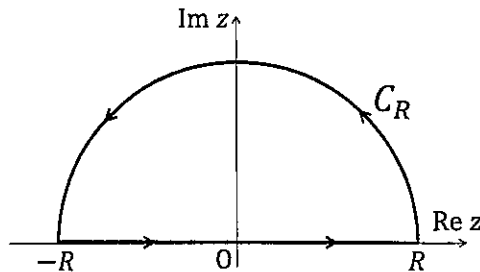


図1: 積分経路。Re z と Im z はそれぞれ z の実部と虚部を表す。

(b) 被積分関数 $e^{-i\omega z} g_\alpha(z)$ の極をすべて求めよ。

(c) 式(2)の複素積分を解答の過程を示した上で実行し、 $\hat{g}_\alpha(\omega)$ を求めよ。

次に上記の $g_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2$) と未知関数 $f(x)$ を含む以下の積分方程式を考える。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y) f(y) dy + \delta(x) - g_2(x) \quad (3)$$

ただし、ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ は、 $\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(x)$ で定義される。

(d) たたみ込み積分 $(g_1 * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y) f(y) dy$ のフーリエ変換を $\widehat{(g_1 * f)}(\omega)$ とする。 $\widehat{(g_1 * f)}(\omega)$ と $\hat{g}_1(\omega)$, $\hat{f}(\omega)$ の間に成り立つ関係を理由とともに述べよ。

(e) 積分方程式(3)の解 $f(x)$ を求めよ。

2. z を $z \neq 0$, $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$ を満たす複素数として, 次の 3 次正方行列

$$A(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z^{-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

を考える。

- (a) $A(z)$ のトレース $\operatorname{tr}A(z)$ および行列式 $\det A(z)$ を求めよ。
- (b) $A(z)$ の逆行列 $A(z)^{-1}$ を求めよ。
- (c) $A(z)$ のすべての固有値を求めよ。また, それらがすべて実数となる z の範囲を複素平面上に図示せよ。
- (d) $A(z)$ が重複する固有値を持つ場合がある。このときの z の値を求めよ。また, このとき $A(z)$ が対角化可能か否かを理由とともに述べよ。
- (e) I を 3 次単位行列, \vec{v} を 3 次元実列ベクトルとして, 3 次正方行列

$$B = A(1) + I + \vec{v}\vec{v}^T \quad (5)$$

を定義する。ただし, \vec{v}^T は \vec{v} の転置である。 B の最小固有値は 0 以上であることを示せ。

