受験番号	
氏　　名	

令和７年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻博士課程入学試験問題

物　　理　　学

令和６年８月２０日（火）　１３時３０分～１６時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で３問ある。３問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計３枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(物理学)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部の余白は使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問
ハミルトニアンが

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x}) \tag{1}$$

で記述される一粒子の一次元量子系を考える。m は質量, $U(\hat{x})$ は時間によらないポテンシャルである。$\hat{x}$, $\hat{p}$ はそれぞれ位置と運動量の演算子で交換関係, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, をみたす。ここで, $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

1. $[\hat{x}, \hat{H}_0]$ を求めよ。

$\hat{H}_0$ のエネルギー固有状態 $|a\rangle$ は

$$\begin{aligned} \hat{H}_0|a\rangle &= E_a|a\rangle \quad (a = 0, 1, 2, \cdots) & (2)\\ \langle a|b\rangle &= \delta_{ab}, & (3)\\ \sum_a |a\rangle\langle a| &= 1 & (4) \end{aligned}$$

をみたす。δ_{ab} はクロネッカーのデルタである。また, 基底状態のエネルギーを E_0 とし, 励起状態のエネルギーを低い方から順に $E_1, E_2, \cdots$ $(E_0 < E_1 < E_2 < \cdots)$ とした。ただし, エネルギーの縮退はないものとする。

2. 以下の関係式を示せ。

$$\langle a|\hat{p}|b\rangle = im\Omega_{ab}\langle a|\hat{x}|b\rangle \tag{5}$$

ただし, $\Omega_{ab} = \frac{E_a - E_b}{\hbar}$ である。

3. 以下の関係式を示せ。

$$\sum_c (\Omega_{ca} + \Omega_{cb})\langle a|\hat{x}|c\rangle\langle c|\hat{x}|b\rangle = \frac{\hbar}{m}\delta_{ab} \tag{6}$$

角振動数 Ω で周期的に振動する摂動 $\hat{V}(t) = \hat{V}_0\cos(\Omega t)$ を系に十分長い時間加える。基底状態 $|0\rangle$ から励起状態 $|a\rangle$ へと遷移する単位時間あたりの確率は, 一次摂動の範囲で

$$W_a = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\hbar^2}\left|\langle a|\hat{V}_0|0\rangle\right|^2\rho & (\Omega = \Omega_{a0}) \\ 0 & (\Omega \neq \Omega_{a0}) \end{cases} \tag{7}$$

と与えられる。ただし, $\rho > 0$ は状態密度, $\Omega_{a0} = \frac{E_a - E_0}{\hbar}$ である。

4. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および, $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ という二つの場合について, W_a が一致することを示せ。ただし, A_0 は時間によらない定数, q は電荷である。

以下の設問では, 一次摂動による遷移が禁制されているとする。基底状態 $|0\rangle$ から励起状態 $|a\rangle$ へと遷移する単位時間あたりの確率は, 二次摂動の範囲で

$$W_a = \begin{cases} \dfrac{\pi}{8\hbar^4}\left|\displaystyle\sum_b \frac{\langle a|\hat{V}_0|b\rangle\langle b|\hat{V}_0|0\rangle}{\Omega-\Omega_{b0}}\right|^2 \rho & \left(\Omega = \dfrac{\Omega_{a0}}{2}\right) \\ 0 & \left(\Omega \neq \dfrac{\Omega_{a0}}{2}\right) \end{cases} \tag{8}$$

と与えられる。ただし, $\rho > 0$ は状態密度である。

5. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および, $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ という二つの場合について, W_a が一致することを示せ。式 (5), (6) および以下の公式を用いてもよい。

$$\Omega_{ab}\Omega_{bc} = \frac{\Omega_{ba}+\Omega_{bc}}{2}\left(\frac{\Omega_{ac}}{2}-\Omega_{bc}\right)+\frac{\Omega_{ac}^2}{4} \tag{9}$$

以下の設問では, 式 (8) に表れる級数の各項は実数で全て同じ符号を持つとする。一般に, 式 (8) の b に関する和を全ての状態についてとることは容易でない。そこで, 中間状態 b として一つの状態のみを考え, W_a を近似的に評価しよう。このとき設問 5 の等価性は破綻し, $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および, $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ の二つの場合で異なる結果が得られる。

6. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および, $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ のどちらを用いた計算結果が, W_a のより良い近似を与えるか, 理由とともに簡潔に答えよ。ただし, エネルギー準位は図 1 のようになっており, $\Omega_{a0} \gg \Omega_{ba} > 0$ をみたす。

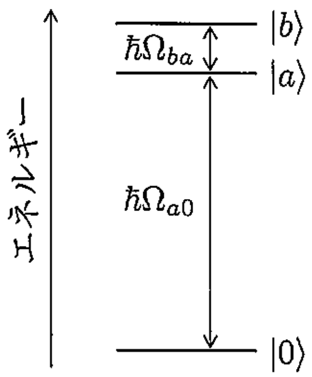

図 1: エネルギー準位

第2問

質量 m で相互作用がなく，同一で互いに判別不能な N 個のボース粒子が，固有振動数 ω の調和振動子ポテンシャルのもと，温度 T の平衡状態にある。ハミルトニアン $\hat{H}$ は，一粒子のハミルトニアン

$$\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \frac{3}{2}\hbar\omega \tag{1}$$

を使って $\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i$ で与えられ，一粒子のエネルギー固有値は

$$E_{n_x,n_y,n_z} = (n_x + n_y + n_z)\hbar\omega \qquad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

である。ここで，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものであり，式 (1) の最後の定数項は，ゼロ点エネルギーがゼロとなるように付け加えた。以下，粒子数 N は十分大きいとする。また，k_B をボルツマン定数とし，$\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}$ とする。

(A) このボース気体の高温領域 $\beta\hbar\omega \ll 1$ での性質を考えよう。

1. カノニカル分布に基づいて，一粒子の分配関数 Z_1 を求めよ。

2. 高温領域 $\beta\hbar\omega \ll 1$ において，相互作用のない N 粒子系の分配関数が $Z = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$ で与えられることを使って，エネルギー期待値 $\langle\hat{H}\rangle$ を近似的に求めよ。

3. 高温領域 $\beta\hbar\omega \ll 1$ は古典極限に相当するが，そこで得たエネルギー期待値は，一様な単原子分子理想気体の内部エネルギーの公式 $U = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T$ と異なる。この違いが何に起因するか，古典統計力学におけるエネルギー等分配則に基づいて考察しよう。一般化座標および一般化運動量を ξ_i と書くことにして，ハミルトニアンがその二次式として $H(\xi_1, \cdots, \xi_{N'}) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i \xi_i^2 (\alpha_i > 0)$ のように書けるとき，カノニカル分布におけるエネルギー期待値は $\langle H\rangle = \frac{N'}{2}k_\mathrm{B}T$ となる。これに基づいて，式 (1) の系の高温領域でのエネルギー期待値が問 2 の結果となる理由，また一様な単原子分子理想気体の内部エネルギーが $U = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T$ となる理由を，ハミルトニアンの形と関連付けて説明せよ。

4. $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ とすると，高温領域における r_i^2 の期待値は $\langle r_i^2\rangle \simeq 3\frac{k_\mathrm{B}T}{m\omega^2}$ となり，粒子は実効的に体積 $V = \frac{4}{3}\pi\langle r_i^2\rangle^{3/2} \simeq 4\sqrt{3}\pi\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m\omega^2}\right)^{3/2}$ の領域に閉じ込められていることがわかる。従って，ω または T を変えることで体積 V を変化させることができる。このことと，熱力学においてヘルムホルツ自由エネルギー F と圧力 p の間に成り立つ関係式を使って，圧力 p を表す式を求め，$\frac{\partial F}{\partial\omega}, \frac{\partial F}{\partial T}, m, \omega, \beta$ の中から必要なものを用いて表せ。

5. 前問の結果とカノニカル分布を使って，高温領域 $\beta\hbar\omega \ll 1$ における圧力 p を求め，ω を使わず V を使って表せ。

(B) 同じボース気体について，量子統計に基づいて低温での性質を議論しよう。化学ポテンシャルを $\mu(\leq 0)$ とすると，ボース分布関数

$$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E-\mu)} - 1} \tag{3}$$

および一粒子の状態密度 $D(E) = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}E}$ を使って，粒子数 N は

$$N = N_0 + \int_0^\infty f(E)D(E)\mathrm{d}E \tag{4}$$

と表すことができる。ここで，$\Omega(E)$ は一粒子の状態数，すなわち $E_{n_x,n_y,n_z} \leq E$ となる状態の数であり，N_0 は基底状態粒子数である。

6. $E \gg \hbar\omega$ の場合に成り立つ，$\Omega(E)$ の近似的な表式を求めよ。

7. 基底状態粒子数 N_0 が無視できる場合に逆温度 β が満たすべき不等式を導出し，ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 T_c を求めよ。ボース・アインシュタイン凝縮とは，巨視的な数の粒子が基底状態をとり，N に比べて N_0 が無視できなくなる状態を指す。解答には以下の関数 $\eta_s(x)$ を使って良い。定義域は $x \leq 0$，パラメータ s は $s > 1$ とする。

$$\eta_s(x) = \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{\mathrm{e}^{y-x} - 1}\mathrm{d}y \tag{5}$$

この関数は x について単調増加し，$\eta_s(0) > 0$ である。

8. 凝縮相 $T < T_\mathrm{c}$ における基底状態粒子数 N_0 を求め，N, T, T_c を使って表せ。

第 3 問
以下の設問に答えよ。ただし解答は MKSA 単位系を用いて記せ。

(A) 静電ポテンシャルが満たすポアソン方程式について考える。

1. 静電ポテンシャルの基本方程式であるポアソン方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

をマクスウェル方程式と静電ポテンシャル ϕ の定義式から導け。ただし，ρ は電荷密度，ε_0 は電気定数 (真空の誘電率)，Δ はラプラシアン ($\Delta = \nabla^2 = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$) である。

2. ポアソン方程式の解 ϕ_1 が与えられたとき，$\phi_2 = \phi_1 + f$ が同じポアソン方程式の解となるためには $\Delta f = 0$ でなくてはならない。これに留意して，ある領域 V 内における電荷密度分布 ρ，その表面 S における静電ポテンシャル $\phi|_S$ が与えられると空間 V 内の静電ポテンシャルが一意に決定することを示せ。

必要ならば以下の数学公式は証明なしに使ってよい。ある領域 V 内で定義されたスカラー関数 g に関して，V の表面を S として

$$\iiint_V g\Delta g\, dV = \iint_S (g\nabla g)\cdot d\boldsymbol{S} - \iiint_V (\nabla g)^2 dV \tag{2}$$

が成り立つ。

(B) 図 1 のように，半空間 $x \leq 0$ を導体で満たし，接地した場合を考える。導体以外の $x > 0$ は真空とする。

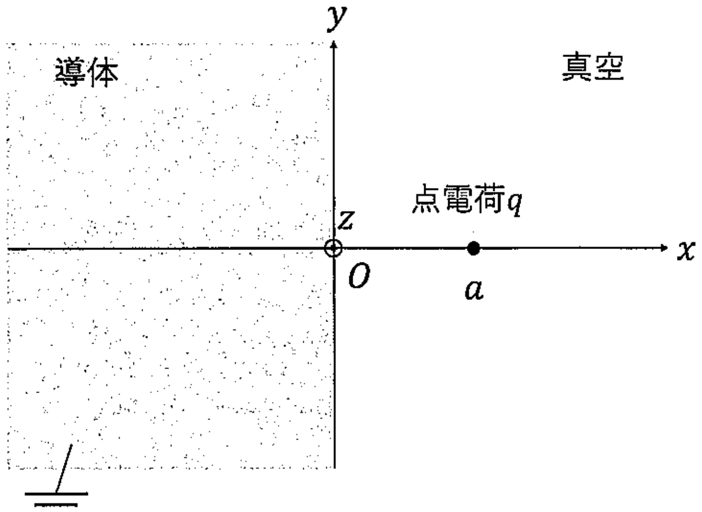

図 1: 導体の前に点電荷を置く。

3. $\boldsymbol{a} = (a, 0, 0)$ の位置に点電荷 q を置いたとき，$x \geq 0$ の位置 $\boldsymbol{r}$ における静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めたい。このとき，$\phi(\boldsymbol{r})$ が満たすべき微分方程式と境界条件を書け。ただし，$a > 0$ とする。

4. 問 3 の解である静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を $x \geq 0$ において具体的に表せ。鏡像法を用いて解答して良いが，この場合は，どのような鏡像電荷をどこに置いたのかを記すこと。

   さらに，解答した $\phi(\boldsymbol{r})$ が問 3 で解答した微分方程式と境界条件を満たしていることを示し，唯一の解であることを説明せよ。この際，必要ならば

$$\iiint_V \Delta \left(\frac{1}{r}\right) dV = -4\pi \tag{3}$$

   が原点を含む，任意の小さな領域 V に対して成り立つことは証明なしで使って良い。ただし，$r = |\boldsymbol{r}|$ である。

(C) 次に，電気双極子について考えよう。

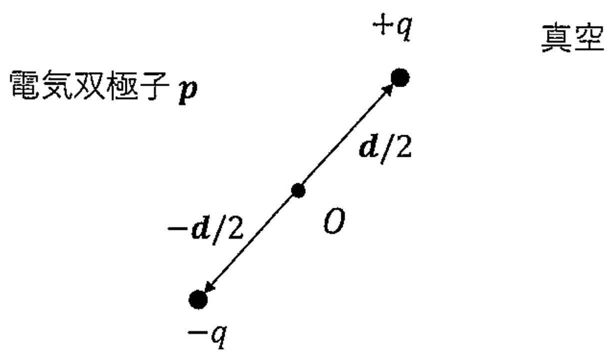

図 2: 真空中の位置 $\boldsymbol{d}/2$ に点電荷 $+q$，位置 $-\boldsymbol{d}/2$ に点電荷 $-q$ を置く。

5. 図 2 のように位置 $\boldsymbol{d}/2$ に点電荷 $+q$，位置 $-\boldsymbol{d}/2$ に点電荷 $-q$ を置く。電気双極子モーメント $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ を一定に保ちつつ $|\boldsymbol{d}| \to 0$ とすることにより原点 O に置いた電気双極子を定義できる。

   全空間を真空とした場合，この電気双極子が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が以下の式で与えられることを示せ。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}\right) \tag{4}$$

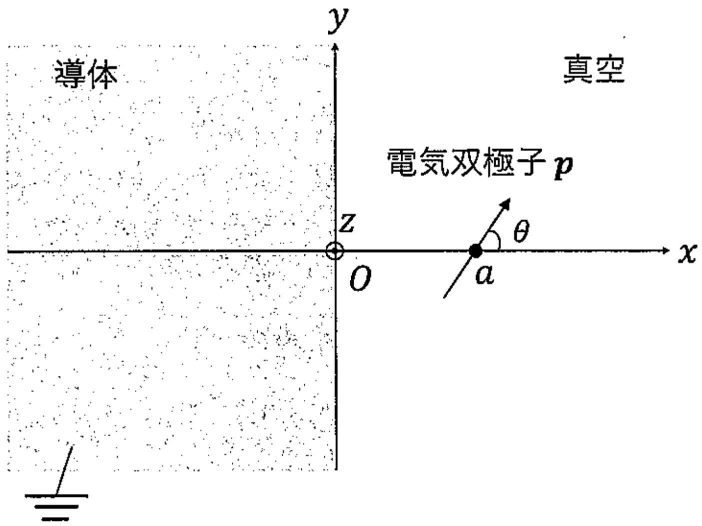

図 3: 導体の前に電気双極子を置く。

図 3 のように，半空間 $x \leq 0$ を導体で満たし，接地し，導体以外の $x > 0$ は真空とする。真空中の位置 $\boldsymbol{a} = (a, 0, 0)$ に場所が固定され，xy 平面内で自由に回転できる電気双極子を置く。ただし，この電気双極子の電気双極子モーメントは $\boldsymbol{p} = (p\cos\theta, p\sin\theta, 0)$ と与えられ，電気双極子の回転運動は xy 平面内で考えれば良いものとする。

6. 点 $\boldsymbol{a}$ における電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。鏡像法を用いる場合は，どこにどのような鏡像を置くのか記せ。

7. この電気双極子に働く，点 $\boldsymbol{a}$ のまわりのトルク（力のモーメント）$\boldsymbol{N}$ を θ の関数として書き，トルクがゼロになる θ を全て求めよ。

8. 問 7 の状況において $\theta = 0$ から角度をわずかにずらすと，電気双極子は周期 T の微小角振動をした。この電気双極子の回転軸まわりの慣性モーメントを I とする。この振動による電場の変化は十分小さいとして，I を ε_0, p, a, T から必要なものを用いて表せ。

専門科目（物理学）の問題訂正

第３問（C）5.

（訂正前）位置 $\boldsymbol{r}$

→ （訂正後） 原点 O 以外の位置 $\boldsymbol{r}$

第３問（C）6.

（訂正前）点 $\mathbf{a}$ における

→ （訂正後） 電気双極子 $\boldsymbol{p}$ により導体に誘導される電荷が，点 $\mathbf{a}$ につくる