

受験番号	
氏 名	

令和 7 年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

専 門 科 目

令和 6 年 8 月 2 0 日 (火) 1 3 時 3 0 分～1 7 時 3 0 分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で 4 問ある。4 問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき 1 枚、合計 4 枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(専門科目)、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部の余白は使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(専門科目)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

ハミルトニアンが

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x}) \quad (1)$$

で記述される一粒子の一次元量子系を考える。 m は質量, $U(\hat{x})$ は時間によらないポテンシャルである。 $\hat{x}$, $\hat{p}$ はそれぞれ位置と運動量の演算子で交換関係, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, をみたす。ここで, $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

1. $[\hat{x}, \hat{H}_0]$ を求めよ。

$\hat{H}_0$ のエネルギー固有状態 $|a\rangle$ は

$$\hat{H}_0|a\rangle = E_a|a\rangle \quad (a = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$\langle a|b\rangle = \delta_{ab}, \quad (3)$$

$$\sum_a |a\rangle\langle a| = 1 \quad (4)$$

をみたす。 δ_{ab} はクロネッカーのデルタである。また, 基底状態のエネルギーを E_0 とし, 励起状態のエネルギーを低い方から順に $E_1, E_2, \dots$ ($E_0 < E_1 < E_2 < \dots$) とした。ただし, エネルギーの縮退はないものとする。

2. 以下の関係式を示せ。

$$\langle a|\hat{p}|b\rangle = im\Omega_{ab}\langle a|\hat{x}|b\rangle \quad (5)$$

ただし, $\Omega_{ab} = \frac{E_a - E_b}{\hbar}$ である。

3. 以下の関係式を示せ。

$$\sum_c (\Omega_{ca} + \Omega_{cb}) \langle a|\hat{x}|c\rangle \langle c|\hat{x}|b\rangle = \frac{\hbar}{m} \delta_{ab} \quad (6)$$

角振動数 Ω で周期的に振動する摂動 $\hat{V}(t) = \hat{V}_0 \cos(\Omega t)$ を系に十分長い時間加える。基底状態 $|0\rangle$ から励起状態 $|a\rangle$ へと遷移する単位時間あたりの確率は, 一次摂動の範囲で

$$W_a = \begin{cases} \frac{\pi}{2\hbar^2} |\langle a|\hat{V}_0|0\rangle|^2 \rho & (\Omega = \Omega_{a0}) \\ 0 & (\Omega \neq \Omega_{a0}) \end{cases} \quad (7)$$

と与えられる。ただし, $\rho > 0$ は状態密度, $\Omega_{a0} = \frac{E_a - E_0}{\hbar}$ である。

4. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および, $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ という二つの場合について, W_a が一致することを示せ。ただし, A_0 は時間によらない定数, q は電荷である。

以下の設問では、一次摂動による遷移が禁制されているとする。基底状態 $|0\rangle$ から励起状態 $|a\rangle$ へと遷移する単位時間あたりの確率は、二次摂動の範囲で

$$W_a = \begin{cases} \frac{\pi}{8\hbar^4} \left| \sum_b \frac{\langle a|\hat{V}_0|b\rangle\langle b|\hat{V}_0|0\rangle}{\Omega - \Omega_{b0}} \right|^2 \rho & \left(\Omega = \frac{\Omega_{a0}}{2} \right) \\ 0 & \left(\Omega \neq \frac{\Omega_{a0}}{2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

と与えられる。ただし、 $\rho > 0$ は状態密度である。

5. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および、 $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ という二つの場合について、 W_a が一致することを示せ。式 (5), (6) および以下の公式を用いてもよい。

$$\Omega_{ab}\Omega_{bc} = \frac{\Omega_{ba} + \Omega_{bc}}{2} \left(\frac{\Omega_{ac}}{2} - \Omega_{bc} \right) + \frac{\Omega_{ac}^2}{4} \quad (9)$$

以下の設問では、式 (8) に表れる級数の各項は実数で全て同じ符号を持つとする。一般に、式 (8) の b に関する和を全ての状態についてとることは容易でない。そこで、中間状態 b として一つの状態のみを考え、 W_a を近似的に評価しよう。このとき設問 5 の等価性は破綻し、 $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および、 $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ の二つの場合で異なる結果が得られる。

6. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および、 $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ のどちらを用いた計算結果が、 W_a のより良い近似を与えるか、理由とともに簡潔に答えよ。ただし、エネルギー単位は図 1 のようになっており、 $\Omega_{a0} \gg \Omega_{ba} > 0$ をみたとす。

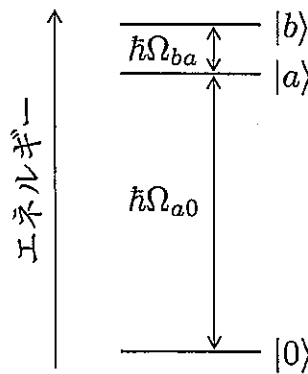


図 1: エネルギー準位

第2問

質量 m で相互作用がなく、同一で互いに判別不能な N 個のボース粒子が、固有振動数 ω の調和振動子ポテンシャルのもと、温度 T の平衡状態にある。ハミルトニアン $\hat{H}$ は、一粒子のハミルトニアン

$$\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (1)$$

を使って $\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i$ で与えられ、一粒子のエネルギー固有値は

$$E_{n_x, n_y, n_z} = (n_x + n_y + n_z) \hbar \omega \quad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

である。ここで、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものであり、式 (1) の最後の定数項は、ゼロ点エネルギーがゼロとなるように付け加えた。以下、粒子数 N は十分大きいとする。また、 k_B をボルツマン定数とし、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とする。

(A) このボース気体の高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ での性質を考えよう。

1. カノニカル分布に基づいて、一粒子の分配関数 Z_1 を求めよ。
2. 高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ において、相互作用のない N 粒子系の分配関数が $Z = \frac{1}{N!} (Z_1)^N$ で与えられることを使って、エネルギー期待値 $\langle \hat{H} \rangle$ を近似的に求めよ。
3. 高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ は古典極限に相当するが、そこで得たエネルギー期待値は、一様な単原子分子理想気体の内部エネルギーの公式 $U = \frac{3}{2} N k_B T$ と異なる。この違いが何に起因するか、古典統計力学におけるエネルギー等分配則に基づいて考察しよう。一般化座標および一般化運動量を ξ_i と書くことにして、ハミルトニアンがその二次式として $H(\xi_1, \dots, \xi_{N'}) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i \xi_i^2 (\alpha_i > 0)$ のように書けるとき、カノニカル分布におけるエネルギー期待値は $\langle H \rangle = \frac{N'}{2} k_B T$ となる。これに基づいて、式 (1) の系の高温領域でのエネルギー期待値が問2の結果となる理由、また一様な単原子分子理想気体の内部エネルギーが $U = \frac{3}{2} N k_B T$ となる理由を、ハミルトニアンの形と関連付けて説明せよ。
4. $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ とすると、高温領域における r_i^2 の期待値は $\langle r_i^2 \rangle \simeq 3 \frac{k_B T}{m \omega^2}$ となり、粒子は実効的に体積 $V = \frac{4}{3} \pi \langle r_i^2 \rangle^{3/2} \simeq 4 \sqrt{3} \pi \left(\frac{k_B T}{m \omega^2} \right)^{3/2}$ の領域に閉じ込められていることがわかる。従って、 ω または T を変えることで体積 V を変化させることができる。このことと、熱力学においてヘルムホルツ自由エネルギー F と圧力 p の間に成り立つ関係式を使って、圧力 p を表す式を求め、 $\frac{\partial F}{\partial \omega}$, $\frac{\partial F}{\partial T}$, m, ω, β の中から必要なものを用いて表せ。
5. 前問の結果とカノニカル分布を使って、高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ における圧力 p を求め、 ω を使わず V を使って表せ。

(B) 同じボース気体について、量子統計に基づいて低温での性質を議論しよう。化学ポテンシャルを $\mu(\leq 0)$ とすると、ボース分布関数

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} \quad (3)$$

および一粒子の状態密度 $D(E) = \frac{d\Omega}{dE}$ を使って、粒子数 N は

$$N = N_0 + \int_0^\infty f(E)D(E)dE \quad (4)$$

と表すことができる。ここで、 $\Omega(E)$ は一粒子の状態数、すなわち $E_{n_x, n_y, n_z} \leq E$ となる状態の数であり、 N_0 は基底状態粒子数である。

6. $E \gg \hbar\omega$ の場合に成り立つ、 $\Omega(E)$ の近似的な表式を求めよ。

7. 基底状態粒子数 N_0 が無視できる場合に逆温度 β が満たすべき不等式を導出し、ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 T_c を求めよ。ボース・アインシュタイン凝縮とは、巨視的な数の粒子が基底状態をとり、 N に比べて N_0 が無視できなくなる状態を指す。解答には以下の関数 $\eta_s(x)$ を使って良い。定義域は $x \leq 0$ 、パラメータ s は $s > 1$ とする。

$$\eta_s(x) = \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{e^{y-x} - 1} dy \quad (5)$$

この関数は x について単調増加し、 $\eta_s(0) > 0$ である。

8. 凝縮相 $T < T_c$ における基底状態粒子数 N_0 を求め、 N, T, T_c を使って表せ。

第3問

以下の設問に答えよ。ただし解答は MKSA 単位系を用いて記せ。

(A) 静電ポテンシャルが満たすポアソン方程式について考える。

1. 静電ポテンシャルの基本方程式であるポアソン方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

をマクスウェル方程式と静電ポテンシャル ϕ の定義式から導け。ただし、 ρ は電荷密度、 ε_0 は電気定数 (真空の誘電率)、 Δ はラプラシアン ($\Delta = \nabla^2 = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$) である。

2. ポアソン方程式の解 ϕ_1 が与えられたとき、 $\phi_2 = \phi_1 + f$ が同じポアソン方程式の解となるためには $\Delta f = 0$ でなくてはならない。これに留意して、ある領域 V 内における電荷密度分布 ρ 、その表面 S における静電ポテンシャル $\phi|_S$ が与えられると空間 V 内の静電ポテンシャルが一意に決定することを示せ。

必要ならば以下の数学公式は証明なしに使ってよい。ある領域 V 内で定義されたスカラー関数 g に関して、 V の表面を S として

$$\iiint_V g \Delta g \, dV = \iint_S (g \nabla g) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V (\nabla g)^2 \, dV \quad (2)$$

が成り立つ。

(B) 図 1 のように、半空間 $x \leq 0$ を導体で満たし、接地した場合を考える。導体以外の $x > 0$ は真空とする。

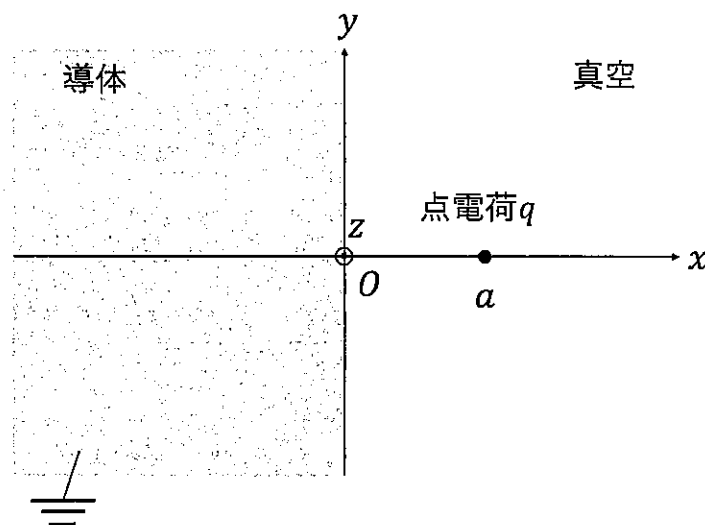


図 1: 導体の前に点電荷を置く。

3. $a = (a, 0, 0)$ の位置に点電荷 q を置いたとき, $x \geq 0$ の位置 r における静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めたい。このとき, $\phi(r)$ が満たすべき微分方程式と境界条件を書け。ただし, $a > 0$ とする。
4. 問 3 の解である静電ポテンシャル $\phi(r)$ を $x \geq 0$ において具体的に表せ。鏡像法を用いて解答して良いが, この場合は, どのような鏡像電荷をどこに置いたのかを記すこと。
- さらに, 解答した $\phi(r)$ が問 3 で解答した微分方程式と境界条件を満たしていることを示し, 唯一の解であることを説明せよ。この際, 必要ならば

$$\iiint_V \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV = -4\pi \quad (3)$$

が原点を含む, 任意の小さな領域 V に対して成り立つことは証明なしで使って良い。ただし, $r = |r|$ である。

(C) 次に, 電気双極子について考えよう。

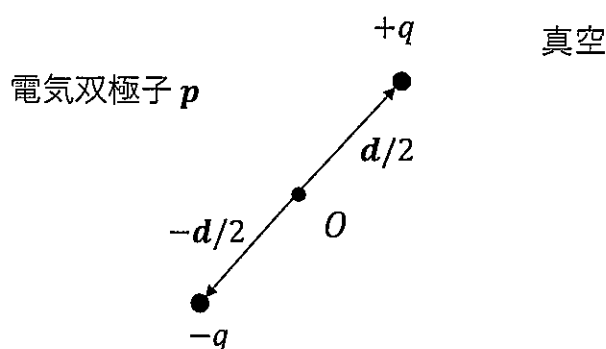


図 2: 真空中の位置 $d/2$ に点電荷 $+q$, 位置 $-d/2$ に点電荷 $-q$ を置く。

5. 図 2 のように位置 $d/2$ に点電荷 $+q$, 位置 $-d/2$ に点電荷 $-q$ を置く。電気双極子モーメント $p = qd$ を一定に保ちつつ $|d| \rightarrow 0$ とすることにより原点 O に置いた電気双極子を定義できる。

全空間を真空とした場合, この電気双極子が位置 r に作る電場 $E(r)$ が以下の式で与えられることを示せ。

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right) \quad (4)$$

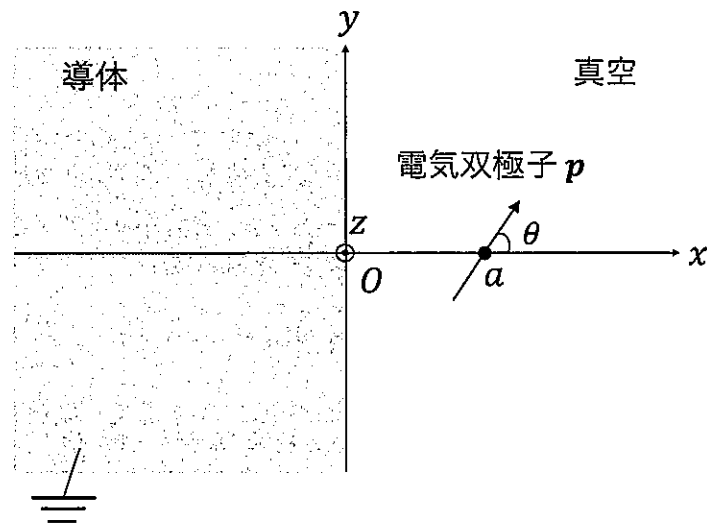


図 3: 導体の前に電気双極子を置く。

図 3 のように、半空間 $x \leq 0$ を導体で満たし、接地し、導体以外の $x > 0$ は真空とする。真空中の位置 $a = (a, 0, 0)$ に場所が固定され、 xy 平面内で自由に回転できる電気双極子を置く。ただし、この電気双極子の電気双極子モーメントは $\mathbf{p} = (p \cos \theta, p \sin \theta, 0)$ と与えられ、電気双極子の回転運動は xy 平面内で考えれば良いものとする。

6. 点 a における電場 $\mathbf{E}$ を求めよ。鏡像法を用いる場合は、どこにどのような鏡像を置くのか記せ。
7. この電気双極子に働く、点 a のまわりのトルク（力のモーメント） N を θ の関数として書き、トルクがゼロになる θ を全て求めよ。
8. 問 7 の状況において $\theta = 0$ から角度をわずかにずらすと、電気双極子は周期 T の微小角振動をした。この電気双極子の回転軸まわりの慣性モーメントを I とする。この振動による電場の変化は十分小さいとして、 I を ϵ_0, p, a, T から必要なものを用いて表せ。

第4問

以下の設問 1, 2, 3 に答えよ。

1. 以下の問いに答えよ。ただし記号 i は虚数単位とし、 $A^\dagger$ は行列 A のエルミート共役（転置の複素共役）を表す。

- (a) H をエルミート ($H^\dagger = H$) かつトレースレス ($\text{tr}H = 0$) な 2 行 2 列の複素行列とする。そのような H は、常に 3 つの実数 x, y, z とパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

を用いて

$$H = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \quad (2)$$

と表せる。 H の行列式 $\det H$ を x, y, z を用いて表せ。

- (b) H をエルミートかつトレースレスな 2 行 2 列の複素行列、 U をユニタリーな 2 行 2 列の複素行列 ($U^{-1} = U^\dagger$) とするとき、

$$H' = U^\dagger H U \quad (3)$$

で与えられる行列 H' が以下の 3 つの性質を満たすことを示せ。

- (i) $H'^\dagger = H'$
 - (ii) $\text{tr}H' = 0$
 - (iii) $\det H' = \det H$
- (c) 設問 (b) より、式 (3) で与えられる H' もエルミートかつトレースレスなので、3 つの実数 x', y', z' を用いて $H' = x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3$ と表すことができる。 H が式 (2) で表され、ユニタリー行列 U が

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

で与えられるとき、ベクトル $\vec{X}' = (x', y', z')$ を x, y, z, θ を用いて表せ。また θ が 0 から 2π まで変化するとき、 $\vec{X}'$ が 3 次元空間上でどのように変化するかを説明せよ。

2. $Q(x) = x(x-1)$ とし, 実数 x の関数

$$f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [Q(x)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

を考える。ただし $f_0(x) = 1$ とする。 $f_n(x)$ は x の n 次多項式になっている。以下の問いに答えよ。

(a) $f_1(x)$ を求めよ。

(b) 整数 m が $0 \leq m < n$ を満たすとき, $\frac{d^m}{dx^m} [Q(x)^n]$ が $x = 0$ と $x = 1$ でゼロになることを示せ。

(c) $g_m(x)$ を x の m 次多項式とする。ただし m は $0 \leq m < n$ を満たす整数である。このとき,

$$\int_0^1 g_m(x) f_n(x) dx = 0 \quad (6)$$

が成り立つことを示せ。ここから $f_n(x)$ の直交性 $\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = 0 \ (m \neq n)$ も分かる。

次に微分演算子

$$\hat{L} = \frac{d}{dx} \left[Q(x) \frac{d}{dx} \right] \quad (7)$$

を考える。

(d) 任意の x の多項式 $g(x), h(x)$ に対して

$$\int_0^1 g(x) (\hat{L}h(x)) dx = \int_0^1 (\hat{L}g(x)) h(x) dx \quad (8)$$

が成り立つことを示せ。

(e) $f_n(x)$ が $\hat{L}$ の固有関数になっていること, つまり

$$\hat{L}f_n(x) = c_n f_n(x) \quad (9)$$

を満たすことを示し, c_n を求めよ。

(ヒント: 一般に n 次多項式は $f_0, f_1, \dots, f_n$ の線型結合で書くことができる。)

3. 以下の各命題について真偽を答え, 「真」の場合は命題を証明し, 「偽」の場合には反例を1つ示せ。反例は具体的な例を挙げること。

(a) X を n 行 n 列の正方行列とする。このとき $X^2 = X$ ならば, $X = I$ または $X = O$ である。ただし I は単位行列, O は全ての成分がゼロの行列を表す。

(b) $f(z)$ を複素数 z の関数とし, 複素平面上の経路 C を $z = 0$ を中心とした半径1の円上を一周する積分経路とする。このとき $\oint_C f(z) dz = 0$ ならば $f(z)$ は $|z| < 1$ で正則である。

専門科目（物理学）の問題訂正

第3問 (C) 5.

(訂正前) 位置 $\boldsymbol{r}$

→ (訂正後) 原点 $\mathbf{O}$ 以外の位置 $\boldsymbol{r}$

第3問 (C) 6.

(訂正前) 点 $\mathbf{a}$ における

→ (訂正後) 電気双極子 $\boldsymbol{p}$ により導体に誘導される電荷が, 点 $\mathbf{a}$ につくる